10. cvičení z PaSti – 2021-05-05

Z každé kapitolky zkuste aspoň jeden příklad.

Konvoluce

1. Buďte $X, Y, Z \sim U(0,1)$ nezávislé náhodně veličiny.

(a) Jaké je rozdělení $X + Y$? Určete hustotu – jak podle konvolučního vzorce, tak „podle obrázku“.

(b) Jaké je rozdělení $X + Y + Z$? Pro jednoduchost určete hustotní funkci jen na intervalu $[0, 1]$.

(c) Jak výsledek ověřit samplováním? (Proveďte rychlý experiment, např. v Pythonu, nebo jen popište, co byste dělali.)

2. Buďte $X, Y, Z \sim \mathit{Exp}(\lambda)$ nezávislé náhodně veličiny.

(a) Jaké je rozdělení $X + Y$?

(b) Jaké je rozdělení $X + Y + Z$?

Aplikace nerovností a Centrální Limitní Věty

3. Statistik chce odhadnout průměrnou výsku h (v metrech) lidí v nějaké populaci, pomocí n nezávislých vzorků $X_1, \dots, X_n$, které vybíráme uniformně náhodně se všech možnych lidí. Pro odhad použije výběrový průměr $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Odhaduje, že směrodatná odchylka jednoho výběru je nejvýše 1 metr.

(a) Jak velké n má volit, aby směrodatná odchylka S_n byla nejvýše 1 cm?

(b) Pro jaké n zajistí Čebyševova nerovnost, že pravděpodobnost, že M_n se liší od h nejvýše o 5 cm s pravděpodobností alespoň 99 %?

4. Označme $S = \sum_{k=0}^{30} \binom{100}{k}$. Označme dále $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$, kde X_i je ± 1 s pravděpodobností $1/2$ a veličiny $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé.

(a) Vyjádřete S pomocí vhodné pravděpodobnosti výroku o X.

(b) Použijte CLV na odhad této pravděpodobnosti.

(c) Vyčíslete S vhodným softwarem a srovnejte.

5. Odhadněte $\binom{100}{30}$ pomocí CLV.

Podmíněná střední hodnota

6. Nechť X je n.v. s hustotou

$$f_X(x) = \begin{cases} x/4 & \text{pro } 1 < x \leq 3, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Označme A jev $\{X \geq 2\}$.

(a) Spočtěte $\mathbb{E}(X)$, $P(A)$, $f_{X|A}$ a $\mathbb{E}(X \mid A)$.

(b) Označme $Y = X^2$. Spočtěte $\mathbb{E}(Y)$ a $\operatorname{var}(Y)$.

Podmíněná hustota

7. Nechť X, Y mají sdruženou hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-y} & \text{pro } 0 < x < y < \infty, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Určete podmíněnou hustotu $f_{X|Y}$.

(b) Určete podmíněnou hustotu $f_{Y|X}$.

8. Metrový klacek zlomíme v uniformně náhodném bodě a ponecháme si levý kus. Jeho délku označíme Y. V něm opět vybereme uniformně náhodný bod, kde klacek zlomíme, a délku levého kusu označíme X.

(a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$. Může vám pomoci podmíněná hustota $f_{X|Y}$.

(b) Najděte marginální hustotu f_X.

(c) Pomocí f_X spočtěte $\mathbb{E}(X)$.

(d) Spočtěte $\mathbb{E}(X)$ pomocí vztahu $X = Y \cdot (X/Y)$.

9. Metrový klacek rozlomíme na tři kusy jedním z níže popsaných způsobů. Pro každý z nich spočítejte, jaká je pravděpodobnost, že ze získaných tří kusů jde sestavit trojúhelník. (Nápověda: napřed si rozmyslete, kdy jsou tři kladná čísla se součtem 1 stranami nějakého trojúhelníku.)

(a) Vybereme uniformně náhodně dva body zlomu.

(b) Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s kusem klacku v pravé ruce.

(c) Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s větším kusem klacku.

10. Volme uniformně náhodně bod z trojúhelníku s vrcholy v bodech $[0,0]$, $[0,1]$ a $[1,0]$, tj. pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu. Označme X, Y souřadnice zvoleného bodu.

(a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.

(b) Najděte marginální hustotu f_Y.

(c) Najděte podmíněnou hustotu $f_{X|Y}$.

(d) Spočtěte $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$ a podle věty o rozboru možností spočtěte $\mathbb{E}(X)$ (pomocí $\mathbb{E}(Y)$).

(e) Spočtěte $\mathbb{E}(X)$ pomocí předchozí části a symetrie.