9. cvičení z PaSti – 2021-04-28

Z každé kapitolky zkuste aspoň jeden příklad.

Samplování

1. Nechť n.v. X má distribuční funkci F, hustotu f, střední hodnotu μ a rozptyl σ^2. Nechť dále $Y = aX + b$.

(a) Jakou střední hodnotu a rozptyl má Y?

(b) Jakou distribuční funkci a hustotu má Y?

(c) Pokud $X \sim N(0, 1)$, jak nastavit a a b, aby bylo $Y \sim N(\alpha, \beta^2)$?

(d) Jsou-li Φ a φ distribuční funkce a hustota pro $N(0, 1)$, jak vypadá distribuční funkce a hustota pro $N(\mu, \sigma^2)$?

2. Vzpomeňte si na větu z přednášky. Nechť $U \sim U(0, 1)$. Jak vyrobíte náhodnou veličinu

(a) s rozdělením $U(a, b)$?

(b) s rozdělením $Exp(\lambda)$?

(c) s Cauchyho rozdělením? (připomeňte si, že $(\operatorname{arctg} x)' = 1/(1 + x^2)$)

(d) s rozdělením $N(0, 1)$?

3. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny a mají všechny stejné rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Označme $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. To můžeme považovat za odhad střední hodnoty μ průměrem z n pokusů.

(a) Určete $\mathbb{E}(S_n)$ a $\operatorname{var}(S_n)$.

(b) Ukažte, jak lze počítat S_n z S_{n-1}, X_n a n.

(c) Použijte vhodné X_i, aby μ obsahovalo číslo π. Sestavte program v libovolném jazyce a spočítejte pomocí něj hodnotu π. (Jak velké n myslíte, že bude potřeba pro pět správných číslic?)

Normální rozdělení

4. Nechť $Z \sim N(0, 1)$. Pomocí tabulky funkce Φ ověřte pravidlo 3σ, neboli spočtěte

(a) $P(|Z| \leq 1)$

(b) $P(|Z| \leq 2)$

(c) $P(|Z| \leq 3)$

(d) Přepište, co to znamená pro n.v. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Modelování pomocí náhodných veličin

Viz úlohy z minulého cvičení.

Spojité vektory

Připomeňte si:

- dvojné integrály jde prohazovat (Fubiniho věta)

$$\int_X \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_Y \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

  Potřeba je, aby se nejednalo o „integrály typu $\infty - \infty$“, neboli $\int_X \int_Y |f(x,y)|$ musí být konečný.

- pro „rozumnou“ množinu A

$$P((X,Y) \in A) = \int_A f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y$
- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x$
- nezávislost X, Y $\Leftrightarrow$ $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ $\Leftrightarrow$ $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$

5. Nechť X, Y mají sdruženou hustotu $f_{X,Y}(x,y) = \mathrm{e}^{-x-y}$ pro $x, y > 0$ (a 0 jinak).

(a) Určete marginální hustoty f_X, f_Y.

(b) Určete také distribuční funkce F_X, F_Y, $F_{X,Y}$.

(c) Jsou X, Y nezávislé?

(d) Najděte $P(X + Y \leq 1)$ a $P(X > Y)$.

6. Volme uniformně náhodně bod z půlkruhu o poloměru 1, se středem v počátku a ležícím v horní polorovině. (Uniformně znamená, že pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu.) Označme X, Y souřadnice zvoleného bodu.

(a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.

(b) Najděte marginální hustotu f_Y a spočtěte pomocí ní $\mathbb{E}(Y)$.

(c) Pro kontrolu spočtěte $\mathbb{E}(Y)$ přímo (pomocí pravidla LOTUS).

7. *(Buffonova jehla)* Na nekonečnou podlahu hodíme náhodně jehlu délky ℓ. Podlaha je z prken, jejich okraje tvoří rovnoběžné přímky ve vzdálenosti d. Určete pravděpodobnost, že jehla bude přesahovat okraj některého prkna.

Nápověda: Nakreslete obrázek a popište polohu jehly pomocí dvou náhodných proměnných (posun a úhel).

K procvičení

8. Buď Y minimum z k uniformně náhodných čísel z intervalu $[0, 1]$. Spočtete $\mathbb{E}(Y)$.

9. Najděte analogii „pravidla 3σ“, neboli spočtěte $P(|X - \mathbb{E}(X)| < c \cdot \sigma_X)$ pro $c = 1, 2, 3$, pokud:

(a) X má uniformní rozdělení,

(b) $X \sim \mathit{Exp}(1)$,

(c) $X \sim \mathit{Exp}(2)$.