7. cvičení z PaSti – 2021-04-14

Z každé kapitolky zkuste aspoň jeden příklad.

Distribuční funkce

Připomeňte si, že distribuční funkce F_X je definována vztahem $F_X(x) = P(X \leq x)$.

1. Pro jistý problém máme k dispozici dva algoritmy, A a B. Algoritmus C spočívá v tom, že si náhodně vybereme, který z algoritmů A, B spustíme – A bude mít pravděpodobnost p, B pravděpodobnost $1-p$. Dobu běhu A, B, C chápeme jako náhodné veličiny, označíme je X, Y, Z.

(a) Vyjádřete $\mathbb{E}(Z)$ pomocí $\mathbb{E}(X)$ a $\mathbb{E}(Y)$.

(b) Určete F_Z pomocí F_X, F_Y.

(c) Pokud jsou X, Y spojité, určete f_Z pomocí f_X, f_Y.

2. Metrový klacek rozlomíme na dva kusy lomem v uniformně náhodném bodě. Buď X délka delší části.

(a) Jaké je rozdělení X?

(b) Určete $\mathbb{E}(X)$.

Hustota

Pro spojité n.v. je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$ pro vhodnou nezápornou funkci f_X (hustotu X). Pak je také $P(X \in A) = \int_A f_X(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Házíme na terč – kruh o poloměru 1. Předpokládejme, že každý bod v terči má stejnou pravděpodobnost zásahu, přesněji, každá jeho podmnožina má pravděpodobnost úměrnou své ploše. Označme X vzdálenost od středu.

(a) Najděte distribuční funkci F_X.

(b) Najděte hustotní funkci f_X.

(c) Zjistěte $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{var}(X)$, σ_X.

4. Bublifukem vyfoukneme bublinu o poloměru $R \sim U(1,5)$. Jaká je střední hodnota povrchu bubliny?

Výpočty momentů

Pro n.v. X definujeme její k-tý moment jako $\mathbb{E}(X^k)$.

5. Buď $X \sim U(a, b)$. Na přednášce jsme si ukazovali výpočet $\mathbb{E}(X)$.

(a) Spočtěte analogicky $\mathbb{E}(X^2)$ a odsud $\mathrm{var}(X)$.

(b) Alternativně, uvědomte si napřed, jaké je rozdělení veličiny $Y = X - \mathbb{E}(X)$. Pak spočtěte $\mathbb{E}(Y^2)$, což je $\mathrm{var}(X)$.

6.

(a) Nechť X je diskrétní nebo spojitá náhodná veličina a $X \geq 0$ skoro jistě (tím se myslí, že $P(X \geq 0) = 1$). Pokud $\mathbb{E}(X)$ existuje, tak $\mathbb{E}(X) \geq 0$. Dokažte.

(b) Nechť Y, Z jsou diskrétní nebo spojité náhodné veličiny a $Y \leq Z$ skoro jistě. Pokud $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(Z)$ existují, tak $\mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(Z)$. Dokažte.

Samplování

7. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Označme $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. To můžeme považovat za odhad střední hodnoty μ průměrem z n pokusů.

(a) Určete $\mathbb{E}(S_n)$ a $\mathrm{var}(S_n)$.

(b) Ukažte, jak lze počítat S_n z S_{n-1}, X_n a n.

(c) Použijte vhodné X_i, aby μ obsahovalo číslo π. Sestavte program v libovolném jazyce a spočítejte pomocí něj hodnotu π. (Jak velké n myslíte, že bude potřeba pro pět správných číslic?)

Modelování pomocí náhodných veličin

8. Pan Chen Cheng navštívil Prahu a v uniformně náhodný čas se objeví na Staroměstském náměstí. Každou celou hodinu od 9:00 do 23:00 se na orloji objevuje 12 figur apoštolů. (Pro účely této úlohy předpokládejme, že apoštolové se objeví jen na okamžik a hned zase zmizí.)

(a) Jaká je pravděpodobnost, že pan Cheng uvidí apoštoly, aniž by čekal déle než 15 minut.

(b) Co když pan Cheng přijde na Staroměstské náměstí v uniformně náhodném čase po poledni, tj. 12:00–24:00?

9. Předpokládejme, že u poštovní přepážky trvá vyřízení jednoho zákazníka čas, který má exponenciální rozdělení a střední hodnotu 4 minuty.

(a) Jaký je parametr λ, jaká je distribuční funkce?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat více než 4 minuty?

(c) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat něco mezi 3 a 5 minutami?

10. Říkáme, že náhodná veličina X (resp. její rozdělení) *nemá paměť*, pokud

$$P(X > s + t \mid X \geq s) = P(X > t)$$

pro $s, t \geq 0$. Jinými slovy, doba, kterou jsme již čekali, nemá vliv na dobu, kterou budeme ještě čekat. Už jsme viděli, že geometrické rozdělení nemá paměť. Ukažte, že ani exponenciální rozdělení nemá paměť. Platí dokonce, že je to jediné spojité rozdělení na kladných čísel bez paměti (a geometrické je jediné diskrétní bez paměti), ale to dokazovat nemusíte.

11. Nechť $X_i \sim \mathit{Exp}(\lambda_i)$ pro $i = 1, \dots, n$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Označme $M = \min(X_1, \dots, X_n)$. Ukažte, že $M \sim \mathit{Exp}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$.

12. Budeme modelovat množství sněhu, který bude na Silvestra v lyžarském areálu Ještěd, pomocí normálního rozdělení se střední hodnotou 40 (centimetrů) a směrodatnou odchylkou 10.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že nám model určí zápornou hodnotu sněhové pokrývky?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že sněhu napadne 50–70 cm?

Hodnoty $\Phi(x)$ si spočítejte v Pythonu nebo v R, případně se podívejte do tabulky na `https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_normal_table` (sekce Cummulative).

Bonusy

13. Návod, jak ověřit, že hustota normálního rozdělení se opravdu zintegruje na 1. Chceme vypočítat $I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x$, resp. ukázat, že $I = \sqrt{2\pi}$. Ukážeme místo toho, že $I^2 = 2\pi$. Platí totiž

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2} \cdot \mathrm{e}^{-y^2/2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

a tento dvojný integrál se velmi zjednoduší po převodu do polárních souřadnic.

14.

(a) Uvažme seznam států světa a jejich aktuálního počtu obyvatel. Odhadněte, kolik z těchto počtů začíná jedničkou! (Lhostejno, na které pozici na první jednička je.)

(b) Srovnejte s nějakou skutečnou tabulkou, např. na `https://www.worldometers.info/world-population/population-by-country/`.

(c) Promyslete, proč by to tak mohlo být. Případně si přečtěte o *Benfordově zákonu.*

15. Střední hodnota diskrétní i spojité náhodné veličiny splňuje

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty P(X > t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^0 P(X < t)\,\mathrm{d}t.$$

K procvičení

16. Nechť $U \sim U(0,1)$ a $p \in [0,1]$. Uvažme funkci

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x > p, \\ 1 & \text{pro } x \le p. \end{cases}$$

Co můžete říct of n.v. $X = g(U)$? Spočtěte její střední hodnotu dvěma způsoby – přímo ze znalosti jejího rozdělení i pomocí pravidla LOTUS.

17. Nechť F_X je dána předpisem $F_X(x) = x/3$ pro $x \in [0,3]$, $F_X(x) = 0$ pro $x < 0$ a $F_X(x) = 1$ pro $x > 3$. Nechť $Y = 1/X$ a $Z = X^2$. Spočtěte

(a) $P(1 \le X \le 2)$

(b) $P(X \le Y)$

(c) $P(X \le Z)$

(d) hustotní funkci f_X.

(e) distribuční funkce F_Y a F_Z.

18. Střední doba života harddisku je 4 roky. Přepokládejme, že tato doba je popsána náhodnou veličinou s exponenciálním rozdělením. (To není realistický předpoklad, viz např. `https://www.backblaze.com/blog/how-long-do-disk-drives-last/`.)

(a) Jaká je pravděpodobnost, že disk selže během prvních tří let?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že vydrží alespoň 10 let?

(c) Po jaké době se rozbije 10 % disků?

19. Plutonium-238 má poločas rozpadu 87.7 let. Jeho rozpad budeme modelovat pomocí exponenciálního rozdělení: pro každý atom budeme čas, za který se rozpadne, považovat za nezávislou náhodnou veličinu s rozdělením $Exp(\lambda)$.

(a) Jaké je λ?

(b) Jaká je střední doba života atomu ^{238}Pu?

(c) Po jaké době se rozpadne 90 % atomů?

(d) Kolik procent atomů se rozpadne po 50 letech? (Mimochodem, některé kosmické sondy a některé kardiostimulátory používají rozpad ^{238}Pu jako zdroj energie.)

20. Pozorujeme meteorický roj. Doba, za kterou uvidíme meteor, je exponenciálně rozdělená se střední hodnotou 1 (minuta).

(a) Jaká je pravděpodobnost, že budeme muset čekat více než 5 minut?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že se dočkáme za nejvýše jednu minutu?

(c) * Jaké je rozdělení času, kdy uvidíme druhý meteor? Třetí, ... (Předpokládáme, že jednotlivé meteory jsou navzájem nezávislé.)

21. Nechť $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(1,4)$.

(a) Najděte lineární funkci $f(t) = a \cdot t + b$, aby $f(Y)$ měla stejnou distribuci jako X.

(b) Spočtěte $P(X \leq 1)$, $P(X > 2)$.

(c) Spočtěte $P(Y < 0)$, $P(Y > 2)$.

22. Buď Y minimum z k uniformně náhodných čísel z intervalu $[0,1]$. Spočtete $\mathbb{E}(Y)$.

23. Frantovi jsme ve skoku do dálky naměřili 9 metrů, což překonává světový rekord o 5 cm. Při měření jsme se ovšem dopustili chyby s rozdělením $N(0, 0.01)$. Jaká je pravděpodobnost, že byl rekord skutečně překonán?

24. Nechť $X \sim N(0,1)$ a $Y = |X|$. Určete $\mathbb{E}(Y)$ a $\mathrm{var}(Y)$.