6. cvičení z PaSti – 2021-04-07

Z každé kapitolky zkuste aspoň jeden příklad.
Pokud se zaseknete, na poslední straně jsou nápovědy.

Základy pravděpodobnosti

1. Uvažme skupinu 25 lidí. Jaká je pravděpodobnost, že žádní dva z nich nemají narozeniny ve stejný den? (Předpokládejte, že den narozenin je rovnoměrně rozdělená náhodná veličina. Pro jednoduchost ignorujte přestupné roky.) Nemusíte vyčíslovat.

Rozbor možností – věta o úplné psti a úplné střední hodnotě

2. Házíme mincí, dokud nepadne orel, na každý hod dostaneme novou minci. (Jaká je pravděpodobnost, že získáme k mincí?) Pak všechny získané mince hodíme najednou, pokud na každé z mincí padne orel, můžeme si je všechny nechat. Jaká je pravděpodobnost, že se to stane? Jaká je střední hodnota počtu získaných mincí? (Tu můžete nechat ve tvaru nekonečné sumy.)

Diskrétní náhodné veličiny

3. Máme kroužek s pěti klíči, jeden z nich je od vchodových dveří. Nevíme který, tak je budeme zkoušet náhodně. Určete pravděpodobnostní funkci a střední hodnotu počtu vyzkoušených klíčů, pokud

(a) po vyzkoušení zapomeneme, který klíč jsme zkoušeli, a další vybíráme opět náhodně ze všech.

(b) vyzkoušené klíče si označíme, příště je už nezkoušíme.

(c) Části (a), (b) zkuste znovu pro variantu s deseti klíči, z nichž jsou dva správné.

4. Knihovna MFF má 1000 čtenářů – studentů informatiky – a rozhoduje se, kolik kopií nové knihy koupit. Předpokládejme, že o knihu má v daný semestr každý student zájem s pravděpodobností $p = 0.01$, nezávisle na ostatních.

(a) Určete pravděpodobnostní funkci pro počet studentů, kteří mají o knihu zájem.

(b) Určete pravděpodobnostní funkci pro Poissonovskou aproximaci tohoto počtu.

(c) Jaká je pravděpodobnost, že 20 kopií knihy nestačí? Vyjádřete jednak pomocí distribuční funkce, jednak pomocí sumy. A také jednak pomocí přesné formule z části (a), jednak pomocí aproximace z části (b).

(d) Je popsaný model zájmu studentů o knihy realistický?

Diskrétní náhodné vektory

5. Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s rozdělením $Geom(p)$.

(a) Napište sdruženou pravděpodobnostní funkci $p_{X,Y}$.

(b) Spočtěte $P(X + Y = n)$.

(c) Spočtěte $P(X = k \mid X + Y = n)$.

6. Označme X náhodnou veličinu, která popisuje počet emailů, které dostaneme za jeden den. Dále $Y \le X$ nechť je počet obdržených emailů, které jsou spamy. Předpokládejme, že $X \sim Pois(\lambda)$. Dále předpokládejme, že každý email, který dostaneme, má (nezávisle na ostatních) pravděpodobnost p, že je spam.

(a) Napište podmíněnou pravděpodobnostní funkci $p_{Y|X}$.

(b) Napište sdruženou pravděpodobnostní funkci $p_{X,Y}$.

(c) Odvoďte z $p_{X,Y}$ marginální pravděpodobnostní funkci p_X a ověřte, že odpovídá $Pois(\lambda)$. (To by mělo být pravda automaticky, ale ověřte to ze vzorce.)

(d) Odvoďte z $p_{X,Y}$ marginální pravděpodobnostní funkci p_Y a ověřte, že odpovídá $Pois(p\lambda)$. (To je poněkud nečekané.)

(e) Odsud snadno plyne, že $Y - X \sim Pois((1-p)\lambda)$.

(f) * Náhodné veličiny X a $Y - X$ jsou nezávislé.

Spojité náhodné veličiny

(Definice si můžete připomenout v příkladech z minulého cvičení.)

7. Nechť F_X je dána předpisem $F_X(x) = x/3$ pro $x \in [0,3]$, $F_X(x) = 0$ pro $x < 0$ a $F_X(x) = 1$ pro $x > 3$. Nechť $Y = 1/X$ a $Z = X^2$. Spočtěte

(a) $P(1 \le X \le 2)$

(b) $P(X \le Y)$

(c) $P(X \le Z)$

(d) hustotní funkci f_X

(e) distribuční funkce F_Y a F_Z

8. *Exponenciální rozdělení* je spojitou analogií rozdělení geometrického. Vyjadřuje dobu čekání na první událost generovanou poissonovským procesem (s daným parametrem λ). Náhodná veličina $X \sim \mathit{Exp}(\lambda)$ má distribuční funkci

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{pro } t \geq 0, \\ 0 & \text{pro } t < 0. \end{cases}$$

Vypočítejte:

(a) hustotní funkci $f_X(t)$

(b) střední hodnotu $\mathbb{E}(X)$

(c) rozptyl $\operatorname{var}(X)$

Nápovědy

1. Stačí použít základní formulku počet dobrých děleno počtem všech.
2. Použijte rozklad pravděpodobnostního prostoru: B_k budou průběhy experimentu, kde první kolo skončíme s k mincemi.
3. (a) Geometrické rozdělení. (b) Představte si, že napřed seřadíme pět klíčů náhodně do řady, pak je bereme v tom pořadí. (c) První část je úplně stejná, druhá je jiná – podobná problému s maximem ze dvou kostek (příklad 4.10.).
4. (a) Jedná se o binomické rozdělení. (b) Zde jde o Poissonovo rozdělení s intenzitou $1000 \cdot 0.01$. (c) Které hodnoty je třeba sčítat? (d) Jak je to s tou nezávislostí?
5. Postupujte přesně podle definic. Pro kontrolu, část (c) nezávisí na k (pokud je hodnota k možná).
6. (a) Víme-li, že pokud $X = n$, tak se Y chová jako $\mathit{Bin}(n, p)$. (b) Použijte vzorec z přednášky – vztah $p_{X,Y}$ a $p_{X|Y}$.
7. Dosaďte do definic.
8. Dosaďte do definic.