5. cvičení z PaSti – 2021-03-31

Rozdělení náhodných veličin

1. *(Newton-Pepys problem)* Označme A_1 jev „z šesti hodů kostkou padne aspoň jedna šestka“. Dále A_2 jev „z dvanácti hodů kostkou padnou aspoň dvě šestky“. Obecně: A_k jev „z $6k$ hodů kostkou padne aspoň k šestek“.

(a) Vyjádřete $P(A_i)$ pomocí vzorečku s kombinačními čísly.

(b) Vyjádřete $P(A_i)$ pomocí distribuční funkce binomického rozdělení.

(c) Jaká je střední hodnota počtu šestek pro každou z variant?

(d) * Zapřemýšlejte, která z $P(A_k)$ by měla být největší, bez použití vzorce.

2. *(de Mèreho problém)*

(a) Jaká je pravděpodobnost, že padne ze čtyř hodů aspoň jedna šestka?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že padne z 24 hodů dvojicí kostek aspoň jedna dvojitá šestka?

(c) De Mèreho problém spočíval v tom, jestli jsou odpovědi na části a, b stejné.

(d) Umíte úlohu interpretovat jako otázku o binomickém rozdělení? O geometrickém rozdělení?

Náhodné vektory

3. Dokažte následující vlastnost Poissonova rozdělení. Nechť $X \sim Pois(\lambda)$, $Y \sim Pois(\mu)$ jsou n.n.v. Pak $X + Y \sim Pois(\lambda + \mu)$.

4. Hodíme třikrát mincí. Označíme X počet rubů v prvních dvou hodech a Y počet líců v posledních dvou hodech.

(a) Určete sdruženou pravděpodobnostní funkci $p_{X,Y}$ a také marginální pravděpodobnostní funkce p_X, p_Y.

(b) Jsou X a Y nezávislé?

(c) Určete $P(X < Y)$.

(d) Určete podmíněnou pravděpodobnostní funkci $p_{X|Y}$.

Spojité náhodné veličiny

Připomeňte si, že distribuční funkce F_X je definována vztahem

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

V některých případech je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ \mathrm{d}t$ pro vhodnou nezápornou funkci f_X (hustotu X); takovým n.v. se říká *spojité*. Pak platí:

- $P(X \in A) = \int_A f_X(t)\ \mathrm{d}t$.
  Přitom $\int_A f(t)\ \mathrm{d}t$ definujeme jako $\int_{-\infty}^{+\infty} 1_A(t) f(t)\ \mathrm{d}t$, kde 1_A je charakteristická funkce množiny (1 uvnitř, 0 venku).
- $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t\ f_X(t)\ \mathrm{d}t$ a obecněji
$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\ f_X(t)\ \mathrm{d}t.$$
- Stejně jako pro diskrétní n.v. je $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

5. Pro n.v. X s distribuční funkcí F vyjádřete

(a) $P(X \in (0, 1])$
(b) $P(X > 0)$
(c) $P(X < 0)$
(d) $P(X \in [0, 1])$

6. Nechť X je spojitá náhodná veličina. Vyjádřete pomocí F_X distribuční funkci náhodných veličin

(a) $-X$
(b) $X^+ = \max(0, X)$
(c) $X^- = -\min(X, 0)$
(d) $|X| = X^+ + X^-$

7. Nechť F_X je dána předpisem $F_X(x) = x/3$ pro $x \in [0, 3]$, $F_X(x) = 0$ pro $x < 0$ a $F_X(x) = 1$ pro $x > 3$. Nechť $Y = 1/X$ a $Z = X^2$. Spočtěte

(a) $P(1 \leq X \leq 2)$
(b) $P(X \leq Y)$
(c) $P(X \leq Z)$
(d) hustotní funkci f_X
(e) distribuční funkce F_Y a F_Z

Bonusy

Viz příklady z minulého cvičení.