2. cvičení z PaSti – 2021-03-10

Podmíněná pravděpodobnost

1. Jaký je vztah tvrzení $P(A \mid B) > P(A)$ a $P(B \mid A) > P(B)$?

2. Pro plánování výletu do Krkonoš používáme českou a polskou předpověď počasí. Každá nám dá binární výsledek *hezky/ošklivo* a má pravděpodobnost úspěchu $p \in [0, 1]$; obě předpovědi jsou nezávislé. Používáme je takto: pokud se shodují, věříme jim, pokud ne, hodíme si korunou. Jaká je pravděpodobnost, že se rozhodneme správně?

3. *(Paradox Montyho Halla)* V soutěžní hře stojíme na podiu před třemi dveřmi. Za dvojemi je koza (tu nechceme, moc žere), za zbylými auto (to chceme, i když vlastně také moc žere). Vybereme si jedny dveře, ale než je otevřeme, moderátor otevře jedny ze zbylých dveří, ukáže za nimi kozu, a nabídne nám, že můžeme svoji volbu změnit. Máme to udělat? Pomůže to? Uvědomte si, že zadání má (minimálně) následující dvě varianty:

(a) moderátor ví, kde je auto, a tomu přizpůsobí, které dveře otevře;

(b) moderátor si hodí korunou, které dveře otevřít. Kdyby odhalil auto, tak bychom asi prohráli, ale to se zrovna nestalo.

Budeme používat strategii, kdy dveře změníme. Spočítejte pravděpodobnost, že vyhrajeme auto, ve variantách (a), (b).

Nezávislé jevy

4. Jsou-li jevy A, B nezávislé, pak jsou nezávislé i A, B^c a také A^c, B^c.

5. Mohou být dva jevy nezávislé a zároveň disjunktní?

6. Najděte jevy A, B, C takové, že $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, ale jevy nejsou po dvou nezávislé.

Testování vlastností

Motivace: Nechť některé elementární jevy mají určitou vlastnost a máme k dispozici test, který ji ne úplně spolehlivě odhaluje – příkladem může být třeba výskyt nemoci v populaci a test na tuto nemoc. Uvažme jevy $N =$ „je nemocný“ a $T =$ „test vyšel pozitivně“.

Představme si, že test danému jedinci vyšel pozitivně. To může znamenat, že nemoc má *(pravý pozitivní výsledek),* nebo že ji nemá, ale test se spletl *(falešný pozitivní výsledek).* Podobně pokud test vyšel negativní, může to být výsledek *pravý negativní* nebo *falešný negativní.* (Anglicky true/false positive/negative.)

Pravděpodobnost pravého pozitivního výsledku je zjevně $P(N \mid T)$, falešného pozitivního $P(N^c \mid T)$, podobně pravého negativního $P(N^c \mid T^c)$ a falešného negativního $P(N \mid T^c)$. Přitom zjevně $P(N \mid T) = 1 - P(N^c \mid T)$ apod.

Při výrobě testu obvykle statisticky testujeme úspěšnost testu na lidech, u kterých víme, zda jsou nemocní. Tím získame opačně podmíněné pravděpodobnosti $P(T \mid N)$ a $P(T \mid N^c)$. Bayseova věta nám je umožňuje obrátit a spočítat pravděpodobnosti z předchozího odstavce.

Ještě k terminologii: U testů se také mluví o *senzitivitě* a *specificitě.* To první je $P(T|N)$ – jaký zlomek nemocných se nám podařilo identifikovat – to druhé pak $P(T^c|N^c)$, tedy totéž pro zlomek zdravých.

Podobnou situaci najdeme i v kontextu vyhledávání informací: představte si třeba internetový vyhledávač, kterému položíte dotaz. Nemocní jsou správné odpovědi na dotaz, pozitivně testovaní jsou výsledky vyhledávače. Tentokrát se parametrům říká *precision* a *recall.* Precision je zlomek správných odpovědí mezi nalezenými, tedy $P(N \mid T)$, čili pravděpodobnost pravých pozitiv. Recall říká, jaký zlomek správných odpovědí jsme našli – to je $P(T \mid N)$, čili totéž, co senzitivita. Ať žije jednotnost terminologie ;)

Bayesova věta

7. Petr dostává hodně emailů, ale 80 % z nich jsou spamy. Jeho spamový filtr 90 % spamů správně označí, ale také 5 % řádných emailů označí jako spam.

(a) Kolik procent emailů bude označeno jako spamy?

(b) Kolik procent řádných emailů je mezi těmi, co jsou označené jako spamy?

(c) Kolik procent spamů je mezi emaily, které testem prošly?

8. Kouřovými signály přenášíme binární soubor. Je proto poměrně vysoká pravděpodobnost chyby u každého bitu: 0 se jako 0 přenese jen s pravděpodobností 0.9, 1 jako 1 jen s pravděpodobností 0.8. Předpokládejme (trochu neseriózně), že jednotlivé znaky se přenáší nezávisle.

(a) Pokud jsme dostali signál 0, jaká je pravděpodobnost, že byl opravdu vyslán?

(b) Dostali jsme zprávu 0010. Jaká je pravděpodobnost, že byla opravdu vyslána?

(c) Jak se výpočet změní, pokud budeme pro kontrolu vysílat každý symbol třikrát (a pak vezmeme častější z těch tří pokusů)?

Úlohu si můžete zjednodušit předpokladem, že 0 a 1 se mají stejnou pravděpodobnost správného přenosu.

9. Pokud vidíme bílého pudla, zvyšuje to naši důvěru, že je každá vrána černá?

Bonusy

10. *(Simpsonův paradox)* V této úloze budeme mít bonbony dvou druhů: dobré červené a nedobré zelené. Bonbony ale vybíráme z nádoby poslepu (nebo jsme barvoslepí). Rozhodněte, zda se může stát následující podivnost:

- Při vytahování bonbonu z bílé krabice máme vyšší pravděpodobnost, že vytáhneme dobrý bonbon, než z černé krabice.
- Při vytahování bonbonu z bílého sáčku máme vyšší pravděpodobnost, že vytáhneme dobrý bonbon, než z černého sáčku.
- Pokud přesypeme bonbony z bílého sáčku do bílé krabice (a z černého do černé krabice), tak budeme mít lepší pravděpodobnost vytažení dobrého bonbonu v černé krabici.

11. *(Prosecutor's fallacy)* Paní C. umřely dvě děti krátce po narození. Je obžalovaná za dvojnásobnou vraždu. Žalobce argumentuje takto: Pravděpodobnost syndromu náhlého úmrtí kojenců je $1/8500$. Takže pravděpodobnost dvou takových jevů je $1/8500^2$. Tudíž pravděpodobnost, že paní C. je nevinná, je $1/8500^2$, což je hodně málo.

Formulujte argumenty žalobce v řeči pravděpodobnosti a nalezněte v nich dvě chyby.

K procvičení

12. Logická formule $A \implies B$ je ekvivalentní obměně $\neg B \implies \neg A$. Budeme se zabývat analogiemi zahrnujícími pravděpodobnost.

(a) Ukažte, že pokud $P(B \mid A) = 1$, tak také $P(A^c \mid B^c) = 1$.

(b) Ukažte, že je však možné, aby $P(B \mid A) \doteq 1$, ale $P(A^c \mid B^c) \doteq 0$.

13. V truhle je sto mincí. Z nich 99 je normálních, ale jedna má na obou stranách orla. Vytáhneme náhodnou minci a šestkrát s ní hodíme, pokaždé padne orel. Jaká je pravděpodobnost, že jsme si vytáhli „dvouorlovou“ minci? (Zkuste napřed odhadnout, pak spočítat.)

14. Na chorobu C máme dva testy, A a B. Test A má sensitivitu i specificitu $p = 0.95$. Test B vždy řekne, že pacient je zdravý. Předpokládejte, že $P(C) = 0.01$.

(a) Spočtěte pro oba testy pravděpodobnost úspěchu (tj. správné odpovědi), použijeme-li je na náhodného pacienta. Rozmyslete si, co to říká o užitečnosti obou testů.

(b) Pro jaké p je pravděpodobnost úspěchu obou testů stejná?

15. Ve volbách hlasují lidé pro dva kandidáty, A a B. Při odchodu z volební místnosti jsou voliči náhodně požádáni o účast v exit-poll. Předpokládejme, že kdo odpoví, odpoví popravdě koho volil, ale ne všichni se zúčastní. Označíme-li E množinu voličů, kteří se exit-pollu zúčastní, tak předpokládejme $P(E \mid A) = 0.7$ a $P(E \mid A^c) = 0.4$. Výsledky exit-pollu jsou 60 % pro A. Jaký je skutečný podíl lidí, kteří hlasovali pro A?

16. Máme tři normální hrací kostky a jednu kostku, kde jsou tři jedničky a tři dvojky. Vybereme uniformně náhodně jednu z kostek, hodíme a padne jednička. Jaká je pravděpodobnost, že jsme vybrali normální kostku?