TeMno
čili procházka teorií množin

(verze 1.1 z 2022-03-04)

0. Úvodem

Základem, na kterém stojí většina současné matematiky, je teorie množin. Je to poměrně abstraktní teorie budovaná axiomaticky – nikdo nám neřekne, co je to množina, pouze jak se množiny chovají. Pojďme si vyzkoušet, jak se taková teorie buduje a co se pomocí ní dá, nebo naopak nedá dokázat. Postupně budeme přidávat axiomy a sledovat, jak se síla teorie vyvíjí.

Pro znalce dodáváme, že se až na drobné odchylky v notaci jedná o standardní Zermelo-Fränkelovu teorii množin, respektive její fragmenty.

1. Jazyk teorie množin

Teorii množin budujeme v logice. Používáme tyto druhy symbolů:

- *proměnné* pro množiny (každý objekt naší teorie bude množina; i prvky množin budou zase nějaké další množiny atd.)
- *predikát náležení* – pokud napíšeme $x \in y$, myslíme tím, že množina x *je prvkem* množiny y.
- *predikát rovnosti* – $x = y$ znamená, že množiny x a y si jsou rovny (tedy považujeme je za tutéž množinu).
- *logické spojky* – například $(x \in y) \wedge (x \in z)$
- *kvantifikátory* – třeba $\forall x : x \in y$.

O rovnosti přitom předpokládáme, že je „slušně vychovaná“. Tedy že je reflexivní ($x = x$), symetrická ($x = y$ právě když $y = x$) a tranzitivní (z $x = y$ a $y = z$ plyne $x = z$). A také že kdykoliv si nějaké dvě množiny jsou rovny, tak cokoliv platí pro jednu, platí i pro druhou.

Odbočka: Všimněte si, že pracujeme s dvěma typy hodnot: množinami a logickými hodnotami (pravda/nepravda). Logická spojka dělá z jedné nebo více logických hodnot jednu logickou hodnotu. Predikát dostane na vstupu množiny a vrátí logickou hodnotu. Ještě by mohly existovat funkce, které by z množin dělaly množiny, ale ty zatím nebudeme zavádět – časem v naší teorii půjdou vybudovat.

Příklad: Už teď umíme o množinách říkat různé věci. Například formule

$$\forall a : (a \in x) \Rightarrow (a \in y)$$

znamená „cokoliv je v x, je také v y“, čili „x je podmnožinou y“. Na to se můžeme dívat jako na nějakou formuli $\varphi(x, y)$ s parametry x a y, která je pravdivá právě tedy, když x je podmnožinou y. Tuto formuli většinou zkracujeme na $a \subseteq b$.

Vyjádřete v jazyce TeMna následující vlastnosti:

Úkol 1.1: $\delta(x, y)$ – množiny x a y jsou disjunktní.

Úkol 1.2: $\mu_0(x)$ – množina x je prázdná. (Zatím neumíme dokázat, že nějaká prázdná množina existuje, ale kdyby existovala, chceme ji umět poznat.)

2. Prvotní axiomy

Zatím máme jenom jazyk jako vyjadřovací prostředek, ale nevíme skoro nic o tom, jak se symboly našeho jazyka chovají. Proto začneme přidávat axiomy, které nám o tom něco slíbí.

Nevíme dokonce, jestli vůbec nějaké množiny existuje. Náš první axiom nám to zaručí – slíbí existenci aspoň jedné množiny, byť neslíbí vůbec nic o tom, co je tato množina zač.

Axiom existence: $\exists x : x = x$

(Formulace je trochu triková, protože na pravé straně existenčního kvantifikátoru musí být nějaká formule. Tak použijeme formuli $x = x$, o které víme, že je vždycky pravdivá.)

Také bude důležité si ujasnit, jak se pozná, že dvě množiny si jsou rovny. Definujeme, že je to právě tehdy, když se shodnou na tom, co jsou jejich prvky:

Axiom extensionality: $\forall x \forall y : (x = y) \Leftrightarrow (\forall a : a \in x \Leftrightarrow a \in y)$.

Množinu proto můžeme jednoznačně určit tím, jaké má prvky. Mohli bychom tedy používat zápis $\{x, y, z\}$ pro množinu s prvky x, y, z a žádnými jinými. Jen zatím nevíme, jestli taková množina doopravdy existuje – na to budeme potřebovat další axiomy.

Také už je jasné, že množina nerozlišuje, jestli v ní nějaký prvek je obsažen jednou nebo vícekrát: množiny $\{x, x, y\}$ a $\{x, y\}$ si jsou rovny.

Úkol 2.1: Vyjádřete vlastnost $\varepsilon(x, a)$ – prvek a je jediným prvkem množiny x (pozor, nemůžeme napsat prostě $x = \{a\}$, protože nevíme, zda množina $\{a\}$ existuje).

Úkol 2.2: Vyjádřete vlasnost $\mu_1(x)$ – množina x má právě 1 prvek.

Úkol 2.3: Ukažte, jak pro libovolné k sestrojit formuli $\mu_k(x)$ testující, zda množina x má právě k prvků. Neumíte-li to obecně, sestrojte μ_2 nebo μ_3.

3. Odbočka k modelům

Vraťme se k prázdné množině. Pomocí vlastnosti μ_0 ji poznáme a díky extensionalitě je touto vlastností jednoznačně určena. Můžeme ji zapsat jako $\{\}$, byť častěji se značí $\emptyset$. Ale existuje doopravdy? Inu, z prvních dvou axiomů to zatím vůbec neplyne.

Jak se něco takového dokazuje? Pomocí modelů. Takový *model* je nějaká realizace našeho množinového vesmíru. Nebudeme ho definovat formálně (ono se to ostatně bez teorie množin dělá těžko :)). Představujme si, že nám model řekne, jaké jsou ve vesmíru množiny a jak se pozná, která je prvkem které. Musíme ale všechno nastavit tak, aby platily všechny (ehm, zatím oba) axiomy.

Dvouaxiomová teorie má dva úplně triviální modely:

- Vesmír, ve kterém existuje jenom prázdná množina.
- Vesmír, ve kterém existuje jen jedna množina, která je svým vlastním prvkem (platí tedy $x = \{x\}$).

V obou modelech evidentně platí oba axiomy. A zatímco v prvním modelu prázdná množina existuje, v druhém nikoliv. Z axiomů tedy nejde její existence rozhodnout (dokázat ani vyvrátit).

4. Podmnožiny a axiom vydělení

Z množin často potřebujeme vybírat (neboli vydělovat) podmnožiny všech prvků s danou vlastností. Tedy to, co se v běžné matematice píše jako $\{a \in x \mid \varphi(a)\}$, kde φ je nějaká vlastnost.

Na to si pořídíme další axiom. Chceme říci, že kdykoliv x je nějaká množina a $\varphi(a)$ vlastnosti (popsaná logickou formulí), můžeme si pořídit množinu

$$y = \{a \in x \mid \varphi(a)\}.$$

Jenže ouha, takový axiom neumíme zapsat, protože v našem jazyce nejde kvantifikovat přes formule! Pořídíme si proto nekonečně mnoho axiomů – pro každou možnou formuli φ jeden. Tomu se někdy říká *meta-axiom* nebo *schéma axiomů*.

Meta-axiom vydělení: $\forall x \exists y \forall a : a \in y \Leftrightarrow (a \in x \wedge \varphi(a))$, kde $\varphi(a)$ je libovolná formule s parametrem a, ve které se nevyskytuje proměnná y.

Příklad: Nechť x je ta množina, kterou nám slibuje axiom existence. Pokud za $\varphi(a)$ zvolíme formuli, která nikdy neplatí, vydělením vznikne prázdná množina. Od teď tedy $\emptyset$ není stvořením z říše hypotéz.

Úkol 4.1: Dokažte, že pro každé dvě množiny x a y existuje jejich průnik $x \cap y$.

Úkol 4.2: První z našich dvou mini-modelů nadále funguje (vydělováním z prázdné množiny jde získat zase jenom prázdná množina), druhý fungovat přestal. Uměli byste vymyslet nějaký jiný triviální model a dokázat pomocí něj, že neprázdné množiny mohou, ale nemusí existovat?

Úkol 4.3: Dokažte, že pro každé dvě množiny x a y existuje jejich rozdíl $x \setminus y$.

5. Bájná množina všech množin

V naší minimalistické teorii množin se už dají dokázat i hodně zajímavé věci. Ukážeme, že neexistuje množina, jejímiž prvky by byly všechny množiny. (Tím pádem neexistuje ani v žádné „plnotučné“ teorii množin, která k našim axiomům přidává další.)

Půjdeme na to sporem. Předpokládáme, že existuje množina všech množin. Nejprve si je rozdělíme na *divoké* (tak budeme říkat množinám, které samy sebe obsahují jako prvek, tedy $x \in x \ldots$ není jasné, zda nějaké takové mohou být, ale co kdyby) a *krotké* (to jsou všechny ostatní).

Vydělením z množiny všech množin můžeme získat množinu k všech krotkých množin, tedy $k = \{x \mid x \notin x\}$. Položme si záludnou otázku: Je k je divoká, anebo krotká?

Kdyby byla divoká, tak $k \in k$. Jenže v k jsou jen krotké množiny, takže k je krotká. A naopak: kdyby k byla krotká, tak $k \notin k$. Jenže množiny neležící v k jsou divoké, takže k je divoká.

Dospěli jsme tedy k závěru, že množina k je divoká, právě když divoká není, což je spor. Množina všech množin tedy nemůže existovat.

6. Dvouprvkové množiny

Vesmír s jednou či dvěma množinami je poněkud nudný. Přidejme tedy další axiom. Zaručí nám, že kdykoliv si řekneme nějaké dva prvky a a b, bude existovat množina x, která obsahuje právě je.

Axiom dvojice: $\forall a \forall b \exists x \forall t : t \in x \Leftrightarrow (t = a \vee t = b)$.

Od teď tedy můžeme bez uzardění psát $\{x, y\}$ pro jakékoliv (existující) x a y. Všimněte si, že tato množina není vždy dvouprvková: pro $x = y$ je to vlastně $\{x\}$.

Úkol 6.1: Sestrojte aspoň 5 různých množin.

Úkol 6.2: Sestrojte co nejvíce množin. Dokážete jich vyrobit nekonečně mnoho?

Úkol 6.3: Co teď víme o existenci tříprvkových množin? Opět pomůže sestrojit vhodný model.

Úkol 6.4: $\{a, b\}$ funguje jako *neuspořádaná dvojice*. Vymyslete, jak pomocí množin vyjádřit *uspořádané dvojice*. Popište, jak pro každé a a b sestrojit nějakou množinu kódující dvojici (a, b). K vašemu způsobu kódování by měly existovat formule $\alpha_1(x, t)$ – „t je prvním prvkem dvojice zakódované do množiny x“ – a analogicky $\alpha_2(x, t)$ pro druhý prvek.

Úkol 6.5: Kódování z minulého úkolu rozšiřte na uspořádané k-tice.

7. Sjednocení množin

Úkol 7.1: Už víme, že pro každé dvě množiny existuje jejich průnik. Dokažte, že zatím není zaručeno, že existuje jejich sjednocení. (Opět pomohou modely.)

Na sjednocování množin budeme potřebovat další axiom. Většinou se formuluje obecněji: pro každou množinu množin existuje jejich sjednocení – tedy například pro $x = \{t_1, t_2, t_3\}$ to má být $t_1 \cup t_2 \cup t_3$. Tomuto sjednocení se říká *suma* množiny x a značí se $\cup x$. Jak vypadají prvky sumy? To jsou prvky prvků množiny x. Axiom tedy můžeme vyslovit následovně:

Axiom sumy: $\forall x \exists y \forall a : a \in y \Leftrightarrow (\exists t : t \in x \wedge a \in t)$.

Úkol 7.2: Dokažte pomocí axiomu sumy, že pro každé dvě množiny x, y existuje jejich sjednocení $x \cup y$.

Úkol 7.3: Dokažte, že pro každé x a y existuje jejich *symetrická diference* $x \,\Delta\, y$. Má obsahovat ty prvky, které leží v právě jedné z množin x a y.

Úkol 7.4: Dokažte, že existuje nějaká tříprvková množina.

Úkol 7.5: Pro každé přirozené k sestrojte k-prvkovou množinu. (Pozor, tohle je opravdu samostatná konstrukce pro jednotlivá k. Tvrzení „pro každé k existuje k-prvková množina“ zatím neumíme v naší teorii ani zapsat [nemáme čísla, neumíme počítat prvky], natož dokázat.)

Úkol 7.6: Přestože už existují libovolně velké konečné množiny, o nekonečných zatím nic nevíme. Sestrojte model, který splňuje všechny axiomy, a přesto neobsahuje žádnou nekonečnou množinu.

Úkol 7.7: Podobně jako sumu množiny množin bychom mohli definovat mnohonásobný průnik. Nadefinujte ho a ukažte, že na jeho existenci už žádný další axiom nepotřebujeme.

8. Kapesní množiny a axiom potence

Už jsme zavedli zápis $\{a_1, \ldots, a_n\}$ pro množinu obsahující (právě) zadané prvky. Tyto prvky můžeme opět zapsat výčtem prvků, a tak dále. Tak vzniknou zápisy z konečně mnoha do sebe vnořených složených závorek oddělených čárkami, například $\{\{\}, \{\{\{\}\}, \{\}\}\}$. Budeme jim říkat *závorkové výrazy.*

Úkol 8.1: Dokažte, že každý závorkový výraz popisuje strukturu nějaké existující množiny.

Takovým množinám budeme (čistě pro naše účely) říkat *kapesní.* Možná existují i nějaké množiny, které kapesní nejsou: například všechny nekonečné množiny nebo divoké množiny, které jsou svým vlastním prvkem. Ale možná také neexistují :)

Všimněte si, že pro kapesní množiny platí, že jejich průniky, sjednocení, rozdíly i podmnožiny jsou zase kapesní množiny. Tomu se říká, že systém všech kapesních množin je *uzavřený* na tyto operace.

Funguje to i s dalšími operacemi. Definujme *potenci* množiny x jako množinu všech jejích podmnožin. Potence se značí $\mathcal{P}(x)$ nebo 2^x. Platí tedy $\mathcal{P}(x) = \{a \mid a \subseteq x\}$. Opět funguje, že potence kapesní množiny je zase kapesní, takže zaručeně existuje.

Pro ostatní množiny ale nevíme, jestli mají potenci. Pojďme proto přidat axiom, který to zaručí:

Axiom potence: $\forall x \exists y \forall a : a \in y \Leftrightarrow a \subseteq x$.

Úkol 8.2: Ukažte, že pokud $\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}(y)$, pak $x = y$.

Úkol 8.3: Může existovat $x : \mathcal{P}(x) = x$?

9. Přepisovací pravidla a axiom nahrazení

Ze způsobů konstrukce množin používaných v matematice nám ještě něco chybí. Co třeba takový zápis $\{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$? Pomiňme, že zatím nemáme ani přirozená čísla ani násobení. Co se tady děje? Bereme prvky jedné množiny, nějak je předěláme a výsledky opět zabalíme do množiny.

Budeme chtít přidat axiom, který takové přepisování prvků dovolí. Jak ale popsat, co nahradíme čím? Inu, podobně jako s podmínkami u axiomu vydělení: logickou formulí. *Přepisovací pravidlo* budeme říkat formuli $\psi(a, b)$, která bude pravdivá právě tehdy, když máme a nahradit za b. Přirozeně nemůžeme chtít jedno a přepsat na více různých b, takže musí platit

$$\forall a \forall b \forall b' : (\psi(a, b) \wedge \psi(a, b')) \Rightarrow b = b'.$$

Přepisovací pravidlo je tedy jakousi primitivní obdobou funkce.

Chceme vyslovit axiom, který nám řekne, že v jakékoliv množině můžeme přepisovat prvky jakýmkoliv přepisovacím pravidlem. Opět narazíme na to, že nelze kvantifikovat přes formule, a obejdeme to přidáním nekonečně mnoha axiomů.

Meta-axiom nahrazení:

$$\begin{gathered}(\forall a \forall b \forall b' : (\psi(a, b) \wedge \psi(a, b')) \Rightarrow b = b') \\ \Downarrow \\ (\forall x \exists y \forall b : b \in y \Leftrightarrow (\exists a : a \in x \wedge \psi(a, b)))\end{gathered}$$

pro jakoukoliv formuli $\psi(a, b)$, v níž se nevyskytuje proměnná y. [Horní část testuje, zda je ψ korektní přepisovací pravidlo, spodní ho aplikuje.]

Úkol 9.1: Ukažte, že axiom vydělení už nepotřebujeme, protože plyne z axiomu nahrazení.

Úkol 9.2: Ukažte, jak se obejít i bez axiomu dvojice.

10. Kartézský součin a funkce

Poslední z obvyklých operací, která nám v naší teorii chybí, je *kartézský součin.* Pro dvě množiny x a y nám vytvoří množinu všech uspořádaných dvojic prvku z x s prvkem z y. Tedy:

$$x \times y = \{(a, b) \mid a \in x \wedge b \in y\}.$$

(Připomeňme si, že kódování uspořádaných dvojic jsme zavedli v úkolu 6.4 a společně s tím i formule $\alpha_1(a, x)$ a $\alpha_2(b, x)$ pro „rozebírání“ kódů.)

Jako obvykle z toho, že $x \times y$ umíme zapsat, vůbec neplyne, že něco takového musí existovat. Pro kapesní množiny je to triviální (opravdu?), ale ani pro ty ostatní už nebudeme potřebovat zavádět nové axiomy. I z těch stávajících dokážeme:

Úkol 10.1: Dokažte, že pro každé dvě množiny existuje jejich kartézský součin.

A jakmile máme definovaný kartézský součin, můžeme už definovat relace a funkce. Připomeňme si, co jistě znáte z Diskrétky:

- Množina r je *relace* mezi množinami x a y, pokud $r \subseteq x \times y$.
- Funkce z množiny x do množiny y je relace f mezi x a y taková, že $\forall a \in x\ \exists! b \in y : (a, b) \in f$. Nebo pokud bychom to chtěli napsat bez zkratek:

  $$\forall a \forall b \forall b' : (a \in x \wedge b \in y \wedge b' \in y \wedge (a, b) \in f \wedge (a, b') \in f) \Rightarrow b = b'.$$

- Pokud f je funkce, $f(a)$ nazveme tu jednoznačně určenou množinu b, pro níž je $(a, b) \in f$.

Úkol 10.2: Definice funkce podezřele připomíná definici přepisovacího pravidla z axiomu nahrazení. Proč jsme tam nemohli přímo použít funkci?

Úkol 10.3: Dokažte, že obraz libovolné množiny je zase množina. Přesněji: pokud f je funkce z x do y a $z \subseteq x$, pak existuje množina $f[z] = \{f(a) \mid a \in z\}$.

11. Ošidný pojem nekonečna

Pomocí kartézských součinů a relací umíme vybudovat i ekvivalence a uspořádání a v podstatě celou konečnou matematiku. Vskutku, teorie, kterou jsme zatím vybudovali, je už docela silná a běžně se používá pod názvem *konečná teorie množin.* Ne snad že by existenci nekonečných množin zakazovala, prostě nich vůbec nic neříká.

Pojďme tedy přidat nějaký axiom, který nám slíbí existenci nekonečných množin. Co kdybychom ho vytvořili podle vzoru axiomu existence a prostě chtěli axiomatizovat, že existuje aspoň jedna nekonečná množina. Ale uměli bychom to vůbec říci?

Úkol 11.1: Pokuste se v jazyce teorie množin definovat vlastnost „množina je nekonečná“. Popište to nějakou formulí $\varrho(x)$.

Pak můžeme prostě říci:

Axiom nekonečna (pokus): $\exists x : \varrho(x)$.

Problém je (odhlédneme-li od potíži s definicí formule $\varrho(x)$), že s takovou nekonečnou množinou bychom si stejně neuměli nic počít. Proto začneme hledat nějakou konkrétnější nekonečnou množinu, totiž množinu přirozených čísel.

Úkol 11.2: Definujte kódování přirozených čísel, konkrétně nějaké množiny m_0, m_1, m_2, ... Co od nich chceme? Především umět sestrojit každou konkrétní m_i. Ale také pro obecné m_i umět najít jeho následníka m_{i+1} – to můžete zapsat jako nějaké přepisovací pravidlo $\sigma(m_i, m_{i+1})$. (Uvědomte si, že pro následníka nemůžeme použít funkci, protože její definiční obor by musela být množina $\mathbb{N}$, kterou ještě nemáme.)

Pak už můžeme vyslovit:

Axiom nekonečna (opravdový): $\exists x : (m_0 \in x \wedge \forall a \forall b : (a \in x \wedge \sigma(a, b) \Rightarrow b \in x))$.

Axiom nekonečna tedy slibuje, že existuje nějaká množina, v níž leží všechna přirozená čísla. Ta pochopitelně musí být nekonečná ... ale nevadí, že v ní může být i nějaké harampádí navíc?

Úkol 11.3: Dokažte existenci množiny ω, která obsahuje všechna přirozená čísla a nic navíc.

Pozor: Množina (třeba) m_5 hraje *uvnitř* teorie roli čísla 5, ale ta pětka v zápisu m_5 je něco úplně jiného – ta žije *venku* mimo teorii a je součástí našeho jazyka, kterým o té teorii mluvíme. To je třeba mít na paměti, ale od této chvíle si tím už nebudeme komplikovat notaci a obojí budeme značit prostě 5.

Úkol 11.4: Vymyslete, jak pro dvě přirozená čísla $x, y \in \omega$ poznat, jestli je $x < y$.

Úkol 11.5: Vymyslete, jak pro dvě přirozená čísla $x, y \in \omega$ sestrojit $x + y$.

Úkol 11.6: Vymyslete, jak pro dvě přirozená čísla $x, y \in \omega$ sestrojit $x \cdot y$.

12. Která množina je větší?

Představte si, že máte dvě množiny. Uměli byste nějak jednoduše říci, která je větší? Pro konečné je to jednoduché: spočítáme jim prvky a porovnáme čísla. Ale co když to jsou nekonečné množiny? U nich není snadné definovat něco jako velikost množiny (a ani to nebudeme dělat). Raději si poradíme jinak:

Definice:

- Množiny x a y jsou *stejně mohutné* (značíme $x \approx y$), pokud mezi nimi existuje bijekce. [Jinými slovy pokud jde spárovat prvky jedné množiny s prvky druhé tak, aby každý prvek byl v právě jednom páru.]

- Množina x je *nejvýše tak mohutná* jako y (píšeme $x \preceq y$), pokud je $x \approx y'$ pro nějakou podmnožinu $y' \subseteq y$. [Nebo bychom mohli říci, že existuje prosté zobrazení z x do y.]
- Konečně x je *méně mohutná* než y ($x \prec y$), pokud $x \preceq y \wedge x \not\approx y$.

Pro konečné množiny tyto pojmy evidentně odpovídají porovnání počtů prvků. Jak u nekonečných?

Definice: Množina je *spočetná*, pokud je stejně mohutná jako množina všech přirozených čísel ω.

Úkol 12.1: Dokažte, že množina $\omega \setminus \{0\}$ je spočetná. A že zůstane spočetná, pokud z ní smažeme libovolný konečný počet prvků.

Úkol 12.2: Dokažte, že množina $2\omega = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ je spočetná. (Tím pádem množina $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ musí být také spočetná, takže ω jde rozložit na sjednocení dvou disjunktních spočetných množin. To by se v konečném světě nestalo.)

Úkol 12.3: Dokažte, že množina $\mathbb{Z}$ všech celých čísel je spočetná. (Formálně jsme ji nedefinovali, zacházejte s ní intuitivně. Podobně budeme neformálně zacházet s racionálními a reálnými čísly.)

Úkol 12.4: Rozložte množinu ω na disjunktní sjednocení spočetně mnoha spočetných množin. Nebo dokažte, že $\omega^2 = \omega \times \omega$ je spočetná. (Uvědomte si, že je to totéž.)

Úkol 12.5: Dokažte, že množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je spočetná.

Úkol 12.6: Dokažte, že ω^k je spočetná pro každé $k \geq 1$. (To je kartézská mocnina: $\omega^1 = \omega$, $\omega^{n+1} = \omega^n \times \omega$.)

Úkol 12.7: Definujme ω^* jako množinu všech konečných posloupností přirozených čísel. Dokažte, že tato množina je také spočetná. (Dořešte, jak se posloupnosti formálně definují.)

Úkol 12.8: Všimněte si, že jsme vůbec nedokázali, že pokud $x \preceq y$ a současně $y \preceq x$, tak také $x \approx y$. To vypadá triviálně, ale není: vlastně tvrdíme, že pokud existuje prosté zobrazení f z x do y a jiné prosté g z y do x, pak také mezi x a y existuje bijekce. Dokažte, že je to pravda. Nápověda: uvažte graf, jehož vrcholy jsou prvky množin x a y a hrany vedou podle funkcí f a g. Jaké má tento graf stupně vrcholů? Jak vypadají komponenty souvislosti?

13. Nespočetné množiny

No dobrá, a jsou vůbec nějaké *nespočetné* množiny? (Tím se samosebou myslí nekonečné nespočetné :)) Dokážeme rovnou mnohem silnější tvrzení:

Věta (Cantorova): $\forall x : x \prec \mathcal{P}(x)$. [Tedy potence množiny je vždy (ostře) mohutnější než množina sama.]

Důkaz (jen pro úplnost, nebudeme se na něj odkazovat): Povedeme sporem a bude trochu připomínat důkaz neexistence množiny všech množin. Předpokládejme pro spor, že existuje nějaká bijekce f z x do $\mathcal{P}(x)$. Tedy pro každý prvek $a \in x$ je $f(a) \subseteq x$. Můžeme se tedy ptát, zda $a \in f(a)$.

Zase říkejme *divoké* těm prvkům a, pro které je $a \in f(a)$, a ostatním krotké. Uvažme množinu všech krotkých prvků $k = \{a \mid a \notin f(a)\}$. Jelikož f je bijekce, musí tato množina k být rovna $f(b)$ pro nějaké b. A teď se to rozbije: ukážeme, že toto b nemůže být ani krotké, ani divoké.

Vskutku: b je krotké $\Leftrightarrow b \notin f(b) \Leftrightarrow b \notin k \Leftrightarrow b$ není krotké. A to je spor. $\square$

Evidentně tedy $\mathcal{P}(\omega)$ musí být nespočetná, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))$ ještě mohutnější a tak dále. Rovnou jsme tedy sestrojili spočetně mnoho nespočetných množin. (Mimochodem, různě mohutných množin se dá najít i nespočetně mnoho, ale to nechme na jindy.)

Pojďme z toho odvodit, že některé další množiny jsou také nespočetné.

Úkol 13.1: Dokažte, že intervaly reálných čísel $[0, 1]$ a $(0, 1)$ jsou stejně mohutné. (Uměli byste najít vhodné zobecnění?)

Úkol 13.2: Dokažte, že interval $(0, 1)$ je stejně mohutný jako celé $\mathbb{R}$.

Úkol 13.3: Dokažte, že nějaký interval reálných čísel je stejně mohutný jako $\mathcal{P}(\omega)$.

Úkol 13.4: *Algebraická* se říká těm reálným číslům, která jsou kořeny nějakého polynomu s celočíselnými koeficienty (nebo racionálními, to je jedno). Ostatním reálným číslům říkáme *transcendentní.* Dokázat o konkrétním čísle, že je transcendentní, není snadné. Ale snadno nahlédneme, že nějaká transcendentní čísla existují: stačí dokázat, že algebraických čísel je jen spočetně mnoho.