Celočíselné datové struktury … vše na RAMu

Máme celočíselné universum $\mathcal{U} = \{0 \dots U\}$, $w = \log U$

- obyčejné množiny → hešování (třeba kukačka) – dotaz $O(1)$ w.c., update $O(1)$ průměrně amort.
- množiny s předchůdcem (Pred) a následníkem (Succ) → tato přednáška

van Emde-Boasovy stromy [1975], – zde v pozdější reformulaci

- universum rozdělíme na $\sqrt{U}$ bloků velikosti $\sqrt{U}$ — předpokládáme $w = 2^k$, tedy $\mathcal{U} = 2^{2^k}$
  - binární pohled: $\underbrace{\overset{hi(x)}{\boxed{\text{blok}}}}_{w/2 \text{ bitů}}\underbrace{\overset{lo(x)}{\boxed{\text{pozice v bloku}}}}_{w/2 \text{ bitů}}$ … rozklad v $O(1)$ na RAMu

Df: vEB(U) si pamatuje pro množinu $S \subseteq \mathcal{U}$:

- min S (zvlášť!) … $S' := S \setminus \{\min S\}$ $\Big\}$ pokud je strom prázdný, min = max = $\emptyset$
- max S (kopie)
- přihrádky $P_0, \dots, P_{\sqrt{U}-1}$ … do nich roztřídíme S'
  - uvnitř P_i je $\mathrm{vEB}(\sqrt{U})$ s dolními polovinami prvků $P_i := \{lo(x) \mid x \in S' \,\&\, hi(x) = i\}$
- sumární strom: $\mathrm{vEB}(\sqrt{U})$ pro $\{i \mid P_i \neq \emptyset\}$

Hloubka vnoření je $O(\log \log U)$

Find(x): triviální – zanořuji se do přihrádek, stojí $O(\log \log U)$

Succ(x):
1. Rozdělíme x na (i, j)
2. Pokud $x < \min$, vrátíme min.
3. Pokud $x \geq \max$, vrátíme $\emptyset$.
4. Pokud $P_i = \emptyset$ (${P_i.\min = \emptyset}$) nebo $j \geq P_i.\max$:
   $i' \leftarrow$ Sum.Succ(i) ← jelikož $x < \max$, i' určitě existuje
   Vrátíme $P_{i'}.\min + i'\sqrt{U}$
5. Jinak:
   Vrátíme $P_i.\mathrm{Succ}(j) + i\sqrt{U}$

} na každé úrovni $O(1)$ práce ⇒ celk. čas $O(\log \log U)$

Insert(x):
1. Pokud $\min = \emptyset$, $\min \leftarrow x$, $\max \leftarrow x$ a skončíme.
   1'. Pokud $x = \min$, skončíme [hodnota už ve stromu je]
2. Pokud $x < \min$: $x \Leftrightarrow \min$
3. Pokud $x > \max$: $\max \leftarrow x$
4. Rozdělíme x na (i, j).
~~5. Pokud $P_i \neq \emptyset$: P_i.Insert(j)~~
5. Pokud $P_i = \emptyset$:
   [Založíme prázdnou P_i.]
   Sum.Insert(i)
6. P_i.Insert(j)

} Pokud proběhne 5. krok (zakládáme P_i), 6. krok je triviální
⇒ jen 1 netriv. rekurzivní volání
⇒ celkově $O(\log \log U)$

Delete(x):
1. Pokud $min = \emptyset$, skončíme
2. Pokud $x = min$:
   - Je-li $Sum.min = \emptyset$: $min, max \leftarrow \emptyset$ a skončíme
   - Jinak $min \leftarrow P_{Sum.min}.min + Sum.min\sqrt{U}$, $x \leftarrow min$
3. Rozdělíme x na (i, j).
4. Pokud $P_i = \emptyset$, skončíme.
5. P_i.Delete(j)
6. Pokud $P_i = \emptyset$: Sum.Delete(i)
7. Pokud $Sum.max \neq \emptyset$: $max \leftarrow P_{Sum.max}.max + Sum.max \cdot \sqrt{U}$
   Jinak $max \leftarrow min$.

na $\forall$ úrovni rekurze čas $O(1)$,
opět je ≤ 1 větev rekurze netriviální
$\Downarrow$
$O(\log\log U)$

- Dobré zprávy: $O(\log\log U)$ na operaci
- Špatné: struktura zabere paměť $O(U)$ a tu je potřeba na začátku vynulovat!

Trik: Pokud náš RAM dovoluje číst neinicializovanou buňku (byť nezaručuje nic o hodnotě), lze inicializaci simulovat.

- Myšlenka: Udržujeme si seznam buněk, do nichž jsme už zapsali.
  Při čtení se podíváme, je-li buňka na seznamu, jinak vrátíme 0.

- 1. pokus:
  - $M[0\ldots]$ – paměť původního RAMu
  - $I[0\ldots N]$ – seznam inicializovaných buněk
  - N – # inic. buněk

  } poskládáno v paměti proložené

  Read i Write stojí $O(N)$. ... pomalé.

- Zrychlení: přidáme $X[\ldots]$ – index k poli I
  - pokud je i-tá buňka inicializovaná, pak $I[X[i]] = i$.
  - jinak $X[i]$ neinicializované

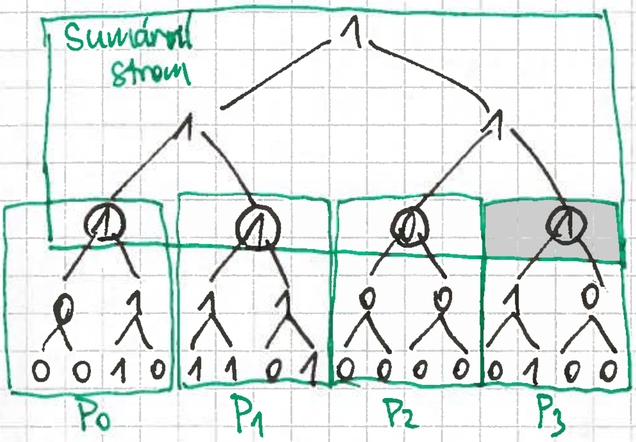
  Read(i): $x \leftarrow X[i]$
  Pokud $x < N$ a $I[x] = i$, vrátíme $M[i]$.
  Jinak vrátíme 0.

  Write(i,y): $M[i] = y$
  $x \leftarrow X[i]$
  Pokud $x < N$ a $I[x] = i$, skončíme.
  $I[N] \leftarrow i$,
  $X[i] \leftarrow N$
  $N{+}{+}$

  } $O(1)$

Věta: Kterýkoli program se složitostí časovou $T(n)$ a prostorovou $S(n)$, který předpokládá paměť inicializovanou nulami, lze transformovat na program se složitostí $O(T(n))$, $O(S(n))$, který to nepředpokládá.
$t + n +$ velikost výstupu ⊛
[potenciální chyták: výstup v neinicializované buňce] → vstup je potřeba na začátku konvertovat, výstup na konci taktéž → proto ⊛

Stromová interpretace vEB (à la intervalový strom)



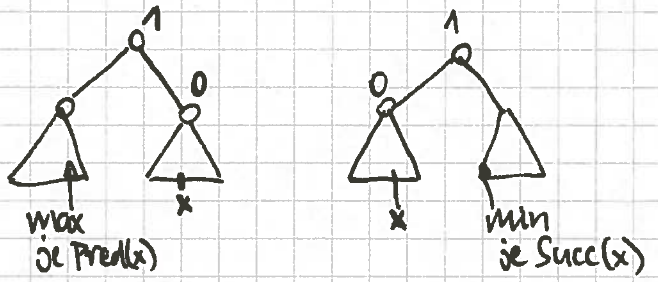
$O(\log U)$ hladin

vnitřní vrcholy obsahují OR listů v podstromu

cesta kořen-list je monotónní (1…10…0)

← v listech indikátorový vektor množiny S

Pred/Succ: Na cestě kořen-list hledáme přechod 1-0 → binárně v $O(\log\log U)$



pro $x \notin S$ dostaneme snadno Pred xor Succ
↓
stačí si prvky S udržovat v seznamu

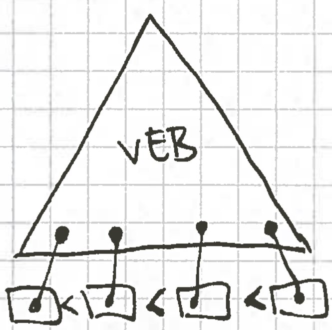
Update trvá $O(\log U)$ … klasický vEB z toho vybruslil ukládáním minima zvlášť
→ použijeme indirekci

Indirekce [Willard 1983]

Myšlenka: množinu rozdělíme na bloky velikosti ~B, ∀blok má reprezentanta v glob. stromu
či spíše setříděnou posl. prvků
B nastavíme na $\Theta(\log U)$

Find/Pred/Succ:

- globální strom mi řekne 2 bloky, kde se x může vyskytovat } $O(\log\log U)$
- ≤2 dotazy na BVS } $O(\log\log U)$



uvnitř bloků BVS … operace v $O(\log B) = O(\log\log U)$

- Update je založený na dělení/slučování bloků.

Invariant: Blok má hustotu $[\frac{1}{4}, 1)$ … tedy #prvků leží mezi $\frac{1}{4}B$ a $\frac{3}{4}B$
Výjimka: ∃ jediný blok

Insert: pokud blok přeplním, rozdělím ho na 2 bloky o hustotě $\frac{1}{2} \pm \varepsilon$ … čas $\Theta(B)$
změny reprezentantů → $O(1)$ updatů globálního stromu

Delete: Pokud hustota klesne pod $1/4$, podíváme se na souseda:

① soused má hustotu $[\frac{5}{8}, 1]$: půjčíme si od něj $\frac{1}{8}$ → náš blok má $\frac{3}{8}$, soused $[\frac{4}{8}, \frac{7}{8}]$

② soused má $[\frac{2}{8}, \frac{5}{8}]$: sloučíme se s ním → $[\frac{4}{8}, \frac{7}{8}]$

Opět $\Theta(B)$ času + $O(1)$ updatů glob. struktury.

! co když mažeme reprezentanta? ... jen ho škrtneme a zůstane v bloku

Amortizace: Po rozdělení/slití je hustota alespoň o $1/8$ vzdálena od mezí
⇒ děje se to nejvýše 1× za $B/8$ operací ⇒ amortizovaně $O(1/B)$ krát

- tedy amort. $\Theta(1)$ času na op. + $O(1/B)$ updatů glob. struktury.
- pro vEB volíme $B = \log U$ → čas $O(\log\log U)$ amort. na update i čtení
  ... ale prostor stále $\Theta(U)$!

x-fast stromy [Willard 1984]

- vyjdeme z "intervalového" vEB
- uložíme do hešovací tabulky pozice všech jedniček [to jsou prefixy bin. zápisů prvků z S]
  Kukačka či dyn. perf. hešování
- prostor $O(n \cdot \log U)$ w.c.
- čtení místo stromu čte heš. tabulku → $O(\log\log U)$ w.c.
- zápisy updatují až $O(\log U)$ položek heše → $O(\log U)$ průměrně amort.

↓ indirekce

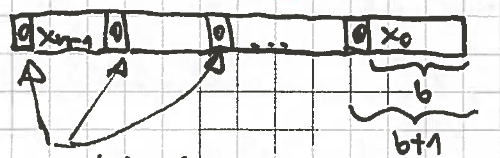
y-fast stromy

- čtení $O(\log\log U)$ w.c.
- zápisy $O(\log\log U)$ průměrně amort.
- prostor $O(n)$ w.c. [glob. strom obsahuje $\Theta(n/\log U)$ položek, každá stojí $\Theta(\log U)$ buněk]

RAM jako vektorový počítač:

Vektor $x_0 \dots x_{n-1} \in [2^b]$, kde $n \cdot b = O(w)$, můžeme reprezentovat číslem v $O(1)$ slovech:
skaláry (značíme řeckými písmeny)

nebo zavedeme slabě neuniformní RAM: $O(1)$ konstant závislých jenom na w



vycpávky (padding)

$\text{Read}(x, i) = (x \gg 2^{(b+1)i}) \ \& \ 1^b$
bin. číslo s b jedničkami

$\text{Write}(x, i, \alpha) = (x \ \& \ 1^{(b+1)(n-i-1)} 0^{b+1} 1^{(b+1)i}) + (\alpha \ll (b+1)i)$

konstanty, odkud je umíme spočítat v $O(1)$, ale i kdyby ne, máváme dost času na předvýpočet

Replicate(α) ... vytvoří vektor $(\alpha, —, \alpha)$ – stačí $\alpha \cdot (0^b 1)^n$

Sum(x) ... sečte $x_0 + \_ + x_{n-1}$, součet se musí vejít do skaláru

① "magické" řešení: $x \bmod 2^{b+1}$ ... $\sum_i 2^{(b+1)i} \cdot x_i \overset{\bmod 2^{b+1}-1}{\equiv} \sum_i 1^i x_i \equiv \sum_i x_i$.

tedy $2^{b+1}-1$

② využitím násobení:

$$\begin{array}{rccccccc}
 & & 0x_{n-1} & 0x_{n-2} & \dots & 0x_1 & 0x_0 \\
\cdot & & 0^b 1 & 0^b 1 & \dots & 0^b 1 & 0^b 1 \\
\hline
 & & x_{n-1} & x_{n-2} & x_2 & x_1 & x_0 \\
 & x_{n-1} & x_{n-2} & x_{n-3} \dots & x_1 & x_0 & \\
x_{n-1} & - & - & - & x_0 & & \\
\vdots & & & & & & \\
x_{n-1} & \text{———} & x_1 & x_0 & & & \\
\hline
 & & \downarrow & & & & \\
 & & x_0 + x_1 + _ + x_{n-1} & & & &
\end{array}$$

všechny prefixové i suffixové součty

$\hookrightarrow x_0$

$\hookrightarrow x_0 + x_1$

$\hookrightarrow x_0 + x_1 + x_2$

nedošlo-li k přenosům mezi bloky

Cmp(x,y) $= z$, $z_i = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x_i < y_i \\ 0 & \text{jindy} \end{cases}$

odečítáme

$$\begin{array}{rcccccc}
 & 1\,x_{n-1} & 1\,x_{n-2} & \text{———} & 1\,x_1 & 1\,x_0 & \leftarrow x \text{ OR maska} \\
- & 0\,y_{n-1} & 0\,y_{n-2} & \text{———} & 0\,y_1 & 0\,y_0 & \\
\hline
\end{array}$$

↳ pokud $x_i \geq y_i$, 1 zůstane

$x_i < y_i$, 1 pohltí přenos a změní se v 0

tedy: $\Big(\big(x \mid (10^b)^n\big) - y\Big) \gg b \;\&\; (0^b 1)^n \oplus (0^b 1)^n$

Min(x,y) $= z$, $z_i = \min(x_i, y_i)$

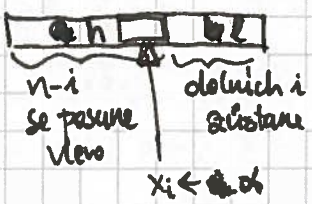
$m \leftarrow \mathrm{Cmp}(x,y) \cdot 1^b$ ... $m_i = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x_i \geq y_i \\ 1^b & \text{pokud } x_i < y_i \end{cases}$

$z \leftarrow (x \,\&\, m) \mid (y \,\&\, {\sim} m)$

Rank(x,α) $= \#i : x_i < \alpha$ ... $\mathrm{Sum}(\mathrm{Cmp}(x, \mathrm{Replicate}(\alpha)))$

↑ skalár

Insert(x,α) ... vkládání do setříděného vektoru



$i \leftarrow \mathrm{Rank}(x, \alpha)$

$h \leftarrow (x \,\&\, 1^{(b+1)(n-i)} 0^{(b+1)i})$

$l \leftarrow (x \,\&\, 1^{(b+1)i})$

Vrátíme $(h \ll (b+1)) \mid (\alpha \ll (b+1)i) \mid l$.

$\underline{\text{Unpack}(\alpha)} = x : x_i = \underbrace{i\text{-tý bit čísla } \alpha}_{\alpha[i]}$:

$x \leftarrow \text{Replicate}(\alpha)$
$y \leftarrow (2^{b-1}, \dots, 2^0)$
$t \leftarrow x \& y$ .... $t_i : \begin{cases} 0 \\ y_i & \text{pokud } \alpha[i]=1 \end{cases}$
$z \leftarrow \text{Cmp}(t, y) \oplus (0^b 1)^n$

... $\underline{\text{Unpack}_\pi(\alpha)}$ ... bity permutuje podle π: pouze se změní maska y: $y_i = 2^{\pi(i)}$

$\underline{\text{Pack}(x)}$ ... inverzní k Unpack

Špinavý trik: "přeformátujeme" vektor:

$$\left|\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|ccccc} 0&0&0&0&x_3&0&0&0&0&x_2&0&0&0&0&x_1&0&0&0&0&x_0 \end{array}\right|$$
$$\left|\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc|cccc} 0&0&0&0&x_3&0&0&0&0&x_2&0&0&0&0&x_1&0&0&0&0&x_0 \end{array}\right|$$

$\downarrow$ Sum (pozor, nekorektně kódovaný vektor & Trik s mod nefunguje, násobení ano.)

$x_3 x_2 x_1 x_0$

Operace s čísly v kvadratické šířce slova ($w = \Omega(b^2)$)

$\underline{\text{Weight}(\alpha)}$ ... Hammingova váha, tedy $\sum_i \alpha[i]$ ... stačí $\text{Sum}(\text{Unpack}(\alpha))$

$\underline{\text{Permute}_\pi(\alpha)} = \text{Pack}(\text{Unpack}_\pi(\alpha))$

$\underline{\text{LSB}(\alpha)}$ ... $\min\{i \mid \alpha[i]=1\}$ ...

$$\begin{array}{rr} \alpha & \dots 10000 \\ \alpha-1 & \dots 01111 \\ \hline \alpha \oplus (\alpha-1) & 000011111 \end{array}$$

stačí tedy $\text{Weight}(\alpha \oplus (\alpha-1)) - 1$

$\underline{\text{MSB}(\alpha)}$ ... $\max\{i \mid \alpha[i]=1\}$ ... třeba $b-1-\text{LSB}(\text{Permute}_{\text{zrcadlení}}(\alpha))$

Jiná možnost: $\#(\#i : 2^i \le \alpha)$ ... tedy $\text{Sum}(\text{Cmp}((2^{b-1}, \dots, 2^0), \text{Replicate}(\alpha)))$
→ tohle je Rank vzhledem k $(2^{b-1}, \dots, 2^0)$

MSB v prostoru $O(w)$ [podobně LSB] [Brodnik 1993] ← ale asi to bylo známé i dříve

1. $b \leftarrow \lceil \sqrt{w} \rceil$, $\ell \leftarrow b$ ... ℓ bloků po b bitech + padding mezi bloky
2. $x \leftarrow (\alpha \& (01^b)^\ell) \mid ((\alpha \& (10^b)^\ell) \gg b)$ ... $x_i \neq 0 \Leftrightarrow i$-tý blok byl neprázdný (proč tak složitě? Musíme dodržet padding)
3. $y \leftarrow \text{Cmp}(0, x)$ ... $y_i = \begin{cases} 0 \\ 1 & \text{pokud } i\text{-tý blok} \neq 0 \end{cases}$
4. $\beta \leftarrow \text{Pack}(y)$, $p \leftarrow \text{MSB}(\beta)$ ... p = číslo nejvyššího bloku s 1
5. $\gamma \leftarrow (\alpha \gg (b+1)p) \& 1^b$ ... obsah bloku
   $q \leftarrow \text{MSB}(\gamma)$ ... MSB uvnitř bloku
6. Vrátíme $(b+1)p + q$.

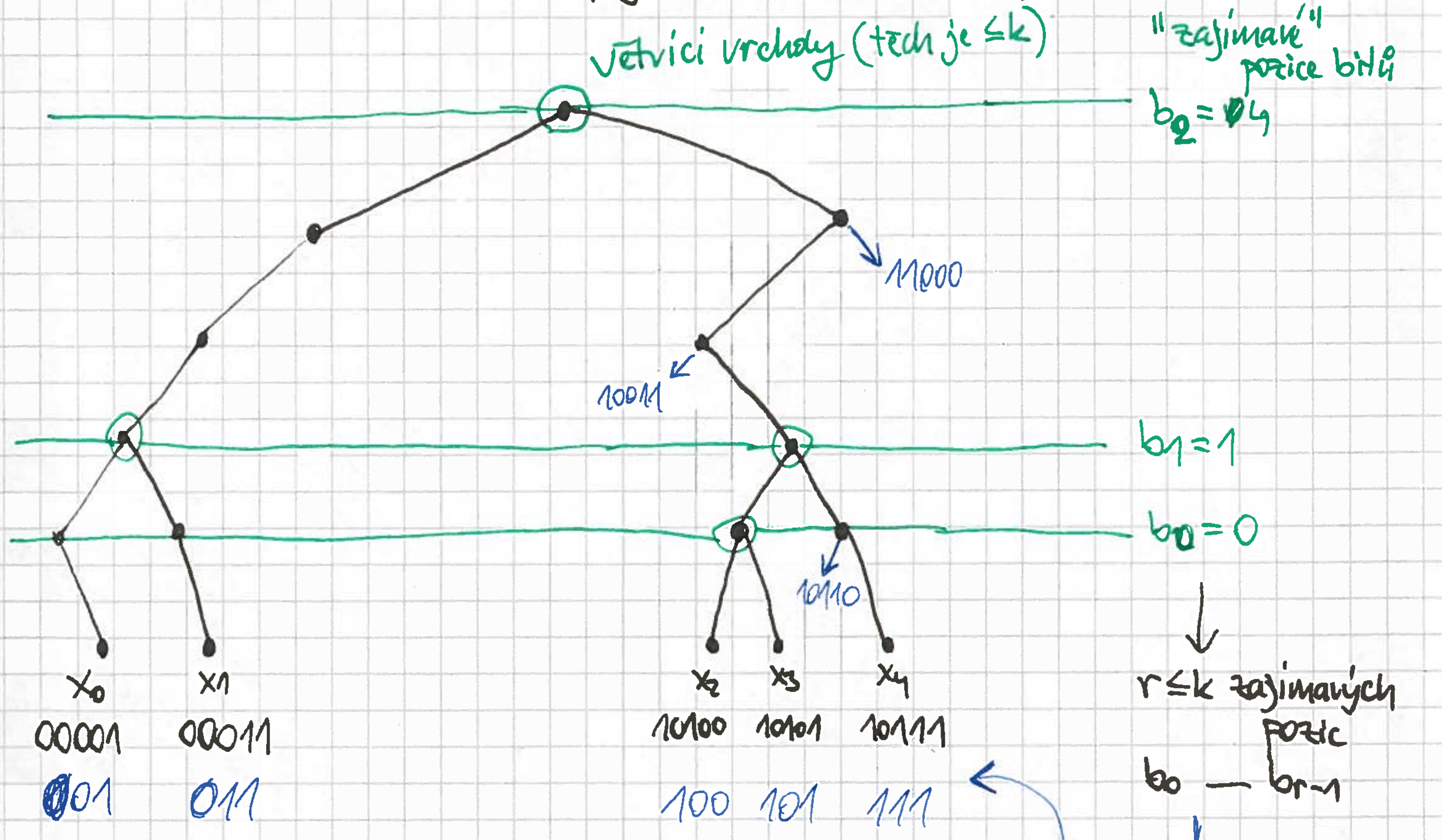
čas $O(1)$
šířka slova $O(w)$

Fusion trees [Fredman & Willard 1990]

- rozhraní jako vEB stromy, fungují lépe pro širší slova (větší universum)
- předvedeme statickou verzi, později použijeme obecnou dynamizační techniku. (exponenciální stromy)
- **Fusion node** – pamatuje si k klíčů $x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1}$, $k = O(w^{1/5})$ (w … šířka slova)
  - umí v konst. čase spočítat $\mathrm{Rank}(q) := \# i : x_i < q$
    - → z toho Pred, Succ v $O(1)$
  - konstrukce v čase $\mathrm{Poly}(k)$
- **Fusion tree** – B-strom pro $B = \Theta(w^{1/5})$, ve vrcholech jsou Fusion nodes
  - hloubka $O(\log_w n) = O\left(\frac{\log n}{\log w}\right)$ … čím delší slovo, tím lepší
  - Rank počítá v $O\left(\frac{\log n}{\log w}\right)$

Konstrukce Fusion nodes

- uvažujme trii nad binárními zápisy klíčů (má hloubku w)



náčrtek (sketch) čísla $s(x)$

zajímavé bity "sklepány" k sobě

$s(x_0) < s(x_1) < \ldots < s(x_{k-1})$

… pokud hledáme $q \in X$, stačí hledat $s(q)$ mezi $\{s(x_i)\}$

- všechna $s(x_i)$ mají $r \cdot k \le k^2 = O(w^{2/5})$ bitů
  - → vejdou se do $O(1)$ slov "fusion" → stačí paralelní Cmp.

Co když hledáme $q \notin X$? $s(q)$ nás na 1. pohled zavede na scestí...

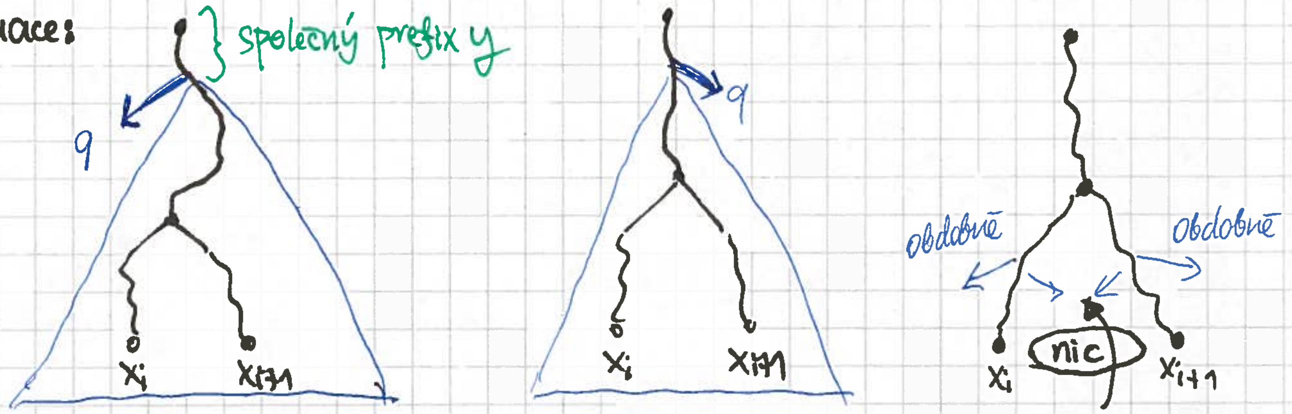
Např. pro $q = 11000$ je $s(q) = 100$, což nás zavede do x_2, ačkoli $\mathrm{Rank}(q) = 5$

Přesto z toho něco odvodíme: Nechť $s(x_i) \le s(q) < s(x_{i+1})$ ...

Spočítáme $\mathrm{MSB}(q \oplus x_i)$, $\mathrm{MSB}(q \oplus x_{i+1})$ a $\mathrm{MSB}(x_i \oplus x_{i+1})$

↑ místo, kde cesta do q odbočí od cesty do x_i

Možné situace:



Succ(q) je Min modrého podstromu
⇓
necháme se vést $s(y0\ldots0)$

K Pred(q) nás vede $s(y01\ldots1)$

zde je q mezi x_i a x_{i+1}

Takže stačí umět počítat v $O(1)$ $s(x)$ a MSB. Z toho Rank v $O(1)$.

$s(x)$ ↙ tohle bohužel neumíme

MSB ↓ viz vektorové triky

Budeme počítat <u>přibližné sketche</u> $a(x)$ ... délky $O(r^4) \le O(w^{4/5})$ } vektory stále mají $O(1)$ slov

... $s(x)$ "prostrkané nulami"

→ stále platí $a(x_i) < a(x_{i+1})$

<u>Princip:</u> $x' = x \,\&\, \sum_i 2^{b_i}$ ... vynulujeme nezajímavé bity

$$x' \cdot M = \left(\sum_{i=0}^{r-1} x[b_i] \cdot 2^{b_i}\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{r-1} 2^{m_j}\right) = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{r-1} x[b_i] \cdot 2^{b_i + m_j}$$

M ↑ pomocná maska

$$a(x) := \left((x' \cdot M) \,\&\, \left(\sum_i 2^{b_i + m_i}\right)\right) \gg (b_0 + m_0)$$

<u>Lemma:</u> Pro $b_0 < \ldots < b_{r-1}$ existují $m_0, \ldots, m_{r-1}$ taková, že:

1. všechna $b_i + m_j$ jsou navzájem různá (nevzniknou kolize)
2. $b_0 + m_0 < \ldots < b_{r-1} + m_{r-1}$ (zachováme pořadí)
3. $(b_{r-1} + m_{r-1}) - (b_0 + m_0) = O(r^4)$ (malé rozpětí)

Dk: (A) Najdeme $m_0' - m_{r-1}' < r^3$ tak, aby $b_i + m_j'$ byly různé modulo r^3.

Indukcí: Máme-li $m_0' - m_{t-1}'$ a hledáme m_t'

Chceme se vyhnout $m_i' + b_j \equiv m_t' + b_\ell$ pro všechna $i<t$, $j,\ell<r$

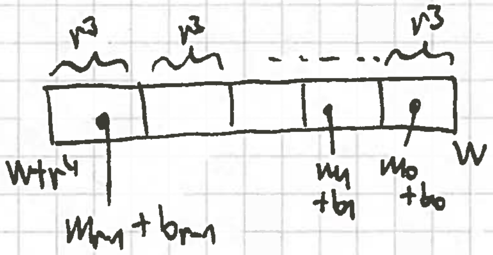
$$m_t' \equiv \underbrace{m_i'}_{t \text{ možností}} + \underbrace{b_j}_{r} - \underbrace{b_\ell}_{r} \Big\}\ tr^2 < r^3 \text{ možností}$$

$\Downarrow$ aspoň 1 volná $\longrightarrow$ m_t' lze zvolit

(B) Posuneme m_i' o násobky r^3, aby $\forall i\ m_i + b_i \in [i \cdot r^3, (i+1) r^3)$

$\downarrow$ m_i

$\downarrow$ to by m_i mohla vycházet záporná, tak ke všem přičteme w



... $m_i + b_j$ jsou stále mod r^3 různá, takže bez mod také.

Shrnutí:

vEB odpovídá v čase $O(\log w)$ ... s w roste
FT v čase $O\left(\frac{\log n}{\log w}\right)$ ... s w klesá

vyrovná se pro $\log n \approx \log^2 w$ $\Downarrow$ $O(\sqrt{\log n})$

Dolní odhad [Sen & Venkatesh 2006] pro Cell Probe

Princip: studujeme interaktivní protokol:

Alice (zná data) $\xrightarrow{a \text{ bitů adresy}}$ Bob (zná strukturu)

Alice $\xleftarrow{b \text{ bitů dat}}$ Bob

Věta: Statická DS pro hledání předchůdců má # cell probes $= \Omega(\min(\log_a w, \log_b n))$.
[bez důkazu]

Důsledek: pro $a = \Theta(\log n)$ [Poly prostor], $b = w$

$\frac{\log w}{\log \log n}$ téměř vEB

$\frac{\log n}{\log w}$ Fusion Tree