# Datové struktury 2 – LS 2015/2016 – Martin Mareš



- Poprvé podle nové akreditace – dost jiná přednáška než dříve (snad je to změna k lepšímu ☺)
  ↳ repríza 2017/2018 (jen mírné úpravy) 2019/2020
- Kontakty: mj@ucw.cz, http://mj.ucw.cz/vyuka/ds2/
- Cvičení nejsou, ale můžete si domluvit konzultaci.
- Přibližný plán:
  - statické slovníky
  - celočíselné DS
  - dolní odhady
  - cache-oblivious DS
  - DS pro stromy a obecné grafy
  - geometrické DS
  - úsporné DS
  - streaming algoritmy

  } literatura dosti kusá; budeme přidávat odkazy na web + scanované poznámky + videozáznamy z r. 2016
- Požadavky ke ~~zkoušce~~: znát odpřednesené, umět to aplikovat a upravovat

---

## VÝPOČETNÍ MODEL

- kdybychom studovali poly. vs. exp., na modelu nezáleží
- u DS ale potřebujeme rozlišovat $\log n$ / $\log\log n$ / $O(1)$ / … ⇒ model musíme specifikovat
- Budeme používat Word-RAM (neřekneme-li jinak)
  - $w$-bitová celá čísla – slova
  - na slovech umíme počítat v konstantním čase (jako v Céčku …)
    - aritmetika: $+, -, *, /, \%$
    - logické operace: &, |, ^, <<, >>, ~
    - porovnávání: $=, <, >$

    } BÚNO dokážeme počítat i s $O(w)$-bit. slovy
  - paměť je pole slov indexované slovy → potřebujeme $w \geq \log_2 n$
    [všechny logaritmy budou nadále implicitně dvojkové]
  - vstup a výstup předáváme v paměti
  - čas = # provedených instrukcí
  - prostor = rozpětí mezi min. a max. adresou použité paměťové buňky

## STATICKÉ MNOŽINY

- Chceme pro $n$-prvkovou $S \subseteq \mathcal{U}$ (universum (třeba slova RAMu)) vybudovat DS, který bude umět rychle odpovídat na dotazy "$x \in S$?"

| | Build | Member | |
|---|---|---|---|
| • Co už umíme: | $O(n \log n)$ | $O(\log n)$ | vyhledávací strom [v porovnávacím modelu nelze lépe] |
| | $O(n)$ průměrně | $O(1)$ w.c. | kukaččí hešování (potřebuje $\log n$-nezávislou rodinu fcí) |
| • Ukážeme: | $O(n)$ průměrně | $O(1)$ w.c. | perfektní hešování FKS (stačí 2-nezávislost) |
| | $O(n)$ průměrně | $O(1)$ w.c. | … jiný přístup … |
| | $O(n \log n)$ w.c. | $O(1)$ w.c. | derandomizace |

# PERFEKTNÍ HEŠOVÁNÍ

FKS = Fredman, Komlós, Szemerédi 1984

Opakování: **Df:** Systém $\mathcal{H}$ hešovacích funkcí $\mathcal{U} \to [m]$ je c-universální ($c>0$) $\equiv \forall x,y \in \mathcal{U}, x \neq y$: $Pr_{h\in\mathcal{H}}[h(x)=h(y)] \leq c/m$.

Navíc obvykle chceme "hezkou parametrizaci" – tedy aby náhodný (rovnoměrně) výběr $h \in \mathcal{H}$ šlo provést rovnoměrně náhodným výběrem $O(1)$ parametrů a pomocí nich pak $h(x)$ vyhodnocovat v čase $O(1)$.

Pro $S \in \binom{\mathcal{U}}{n}$ a funkci $h: \mathcal{U} \to [m]$ počítáme kolize: $\{x,y\} \in \binom{S}{2}$ t.ž. $\underbrace{h(x)=h(y)}_{\text{nastane s pstí} \leq \frac{c}{m}}$.

**Lemma:** $\mathbb{E}_{h\in\mathcal{H}}[\#\text{kolizí}] = \sum_{\{x,y\}} \mathbb{E}[C_{xy}] \leq \binom{n}{2} \cdot \frac{c}{m} \leq \frac{n^2 \cdot c}{2m}$

indikátor kolize

Pro $m = \lceil n^2 c \rceil$ je $\mathbb{E}_{h\in\mathcal{H}}[\#\text{kolizí}] < \frac{1}{2}$, takže podle Markovovy nerovnosti je
$Pr_h[h \text{ koliduje na } S] = Pr[\#\text{kolizí} > 2 \cdot \mathbb{E}[\#\text{kolizí}]] < \frac{1}{2}$.

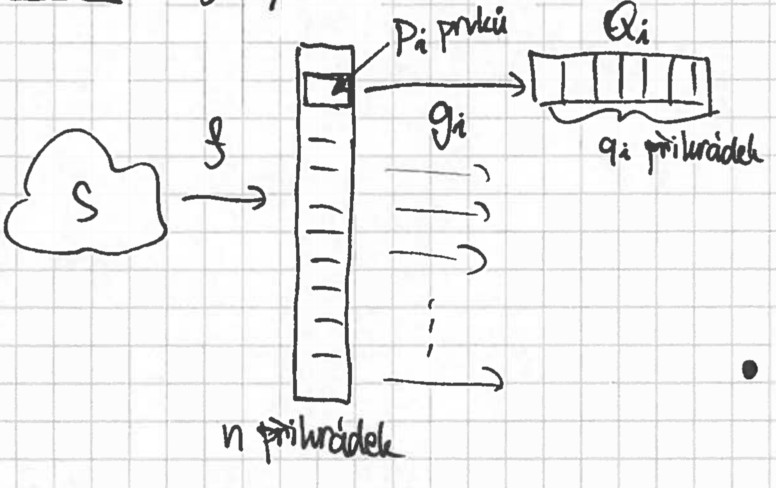
$\Rightarrow$ proto budeme-li volit $h$ náhodně z $\mathcal{H}$, tak dlouho, než objevíme nějakou perfektní, bude to trvat průměrně $\leq 2$ pokusy:

**Lemma** (O čekání): Čekáme-li na událost, která nastane s pstí $p$, pak $\mathbb{E}[\#\text{pokusů, než se dočkáme}] = 1/p$.

... jeden pokus trvá $\Theta(n)$ [pokud kolize detekujeme přihrádkovým tříděním], takže v čase průměrně $\Theta(n)$ perfektní fci najdeme.

... jenže potřebujeme kvadraticky velkou tabulku $\Rightarrow$ inicializace stojí $\Theta(n^2)$.

Konstrukce dvojstupňového hešování:




- $f \in \mathcal{H}$ hešuje do $n$ přihrádek
  $\mathbb{E}[\#\text{kolizí}] \leq \frac{cn}{2}$
  ... umím efektivně najít $f$, pro níž $\#\text{kolizí} < cn$.
- $g_i$ hešuje do $[q_i]$ pro $q_i = \lceil P_i^2 \cdot c \rceil$, takže umíme najít perfektní fci

Dokážeme, že celková velikost všech $Q_i$ je $O(n)$:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \leq n + c \cdot \sum_i P_i^2 \leq n + c \underbrace{\left(\sum_i P_i\right)}_{n} + c \cdot \underbrace{\sum_i \binom{P_i}{2}}_{= \#\text{všech kolizí fce } f \leq \frac{cn}{2}} \in O(n).$$

$P_i^2 = P_i + 2 \cdot \binom{P_i}{2}$, kde $\binom{P_i}{2}$ = # kolizí v $i$-té přihrádce fce $f$

**Spotřeba paměti:**
- parametry $f$ … $O(1)$
- parametry $g$ … $O(n)$
- tabulka indexovaná $f$ (pointery na $Q_i$) … $O(n)$
- tabulky $Q_i$ … $O(n)$

} celkem $O(n)$

**Čas na konstrukci:**
- průměrně $O(n)$ na volbu $f$
- průměrně $O(q_i)$ na volbu $g_i$

} celkem průměrně $O(n)$

**Čas na dotaz:**
- výpočet $f$
- nahlédnutí do hlavní tabulky pro pointer a param. $g_i$
- výpočet $g_i$
- nahlédnutí do $Q_i$

} $O(1)$ w.c.

**Poznámka:** $\exists$ dynamizace s časem $O(1)$ průměrně amortizovaně na Ins/Del a $O(1)$ w.c. na dotaz.

**Odbočka:** Třídění reálných čísel vybíraných rovnoměrně náhodně z $[0,1]$.

- Rozdělíme $[0,1]$ na $n$ přihrádek
- v $O(n)$ rozmístíme čísla do přihrádek … $E[\#\text{kolizí}] < \frac{n^2}{2}$
- v každé přihrádce dotřídíme bublinkově
  … trvá to $O((\text{velikost přihrádky})^2)$, což se sečte na

} průměrně $O(n)$

---

## $\boxed{\text{DETERMINISTICKÉ SLOVNÍKY}}$ Hagerup, Miltersen, Pagh 2000

- Nejprve ukážeme ~~deterministickou~~ randomizovanou verzi, pak ji derandomizujeme.
- Skládáme několik transformací: (Všechno to jsou prosté funkce)

obecné universum

[pozor, toto je neuniformní: potřebujeme konstanty závislé na $n$, které neumíme rychle spočítat]

$\downarrow$ … nebudeme ukazovat (myšlenka: samoopravný kód ⇒ $x,y$ se liší na dost místech ⇒ $\exists$ malá množina bitů, kde se liší všechna $x \in S$)

odvodíme z 2-nezávislého systému hešovacích funkcí

universum $[O(n^k)]$

$\downarrow$ … trie hloubky $O(1)$ se abecedou $[n]$ … potřebuji dotazy na (vrchol, symbol)

těch je $O(n)$ $\qquad$ $[n]$

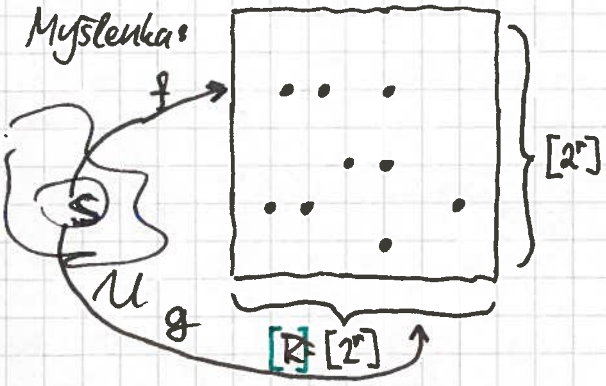
universum $[O(n^2)]$

$\downarrow$ … toto je ta netriviální část, viz dále

tabulka velikosti $O(n)$

- Notace: nerozlišujeme mezi čísly z $[O(n^2)]$ a bit. řetězci z $\{0,1\}^{2\log n + O(1)}$

Myšlenka:




Prvky z $S$ odpovídají ~~bodům~~ bodům v mřížce $[2^r]\times[2^r]$.
Chceme je transformovat tak, aby v řádku byl max. 1 bod.

**Krok:** $(i,j) \to (i, j \oplus a_i)$ … a pak totéž znovu ve sloupcích

} pokaždé řádově n-krát, sníží #kolizí

[omezíme #kolizí ve sloupcích funkcí #kolizí v řádcích]

**Df:** Dvojice funkcí $(f,g)$ z $\mathcal{U}$ do $[R]$ je *q-dobrá* (pro $q \geq 0$), pokud $f$ má na $S$ nejvýše $q$ kolizí a $x \mapsto (f(x), g(x))$ je na $S$ prostá.

**Lemma:** Nechť $(f,g)$ je q-dobrá a $r \geq \log n + 1$.
Pak $\exists a_0 \ldots a_{z-1} \in [R]$ t.ž. $\underbrace{(x \mapsto g(x) \oplus a_{f(x)}, f(x))}_{\text{posunu řádky a transponuji mřížku}}$ je $q'$-dobrá pro $q' = \cancel{\lfloor 2^{3-r} \cdot q \rfloor \cdot n}$ $q' = \min(n, \lfloor 2^{3-r} \cdot q \rfloor \cdot n)$

Navíc všechna $a_i$ lze pro dané $S, f, g$ spočítat randomizovaně v očekávaném čase $O(n + 2^r)$ a worst-case prostoru $O(n + 2^r)$.

} za předpokladu, že $f, g$ umíme vyhodnocovat v konst. čase

**Využití:** Mějme nějakou $S \subseteq \{0,1\}^w$. Zvolíme $r > \max(w/2, \log n + 3)$.

(jelikož $\mathcal{U}$ je velké $O(n^c)$, je $r \leq \log n + O(1)$ a $R \in O(n)$)

0. krok: $(f,g)$ rozkládající $x \in S$ na horních a dolních $r$ bitů (s překryvem, je-li třeba)

- $(f,g)$ je jistě prostá na $S$
- $f$ má na $S$ nejvýše $\binom{n}{2} < n^2$ kolizí.

} pár $(f,g)$ je $n^2$-dobrý

↓ Lemma (zde je potřeba omezení $q' \leq n$ z tvrzení lemmatu)

1. krok: $(f', g')$ … jelikož $2^{3-r} < \frac{1}{n}$, musí tento pár být $<n$-dobrý

↓ Lemma (… a zde naopak druhá část …)

2. krok: $(f'', g'')$ … $<1$-dobrý, takže 0-dobrý $\Rightarrow f''$ je prostá na $S$.

**Výpočet heš. funkce:**
1. Rozdělíme $x$ na $p, q$ r-bitové
2. ~~…~~ $q \leftarrow q \oplus a_p$
3. $p \leftarrow p \oplus b_q$
4. Vydáme výsledek

} čas $O(1)$

**Prostor:** Tabulky pro $a, b$ + finální hešovací tabulka } $O(n)$ slov

**Dk lemmatu:** Nejprve očíslujeme řádky od nejplnějšího:

$$S_i := \{ x \in S \mid f(x) = v_i \},$$

kde $v_1 \ldots v_{2^r}$ je permutace na $[R] = [2^r]$ taková, že $|S_1| \geq |S_2| \geq \ldots \geq S_{2^r}$.

V tomto pořadí řádkům přidělujeme jejich ~~…~~ $a_{v_i}$.

• Nechť jsme již zpracovali $S_{<i} := S_1 \cup \ldots \cup S_{i-1}$ a přidáváme $S_i$.

Vybereme $a_{v_i} \in R$ náhodně, počítáme, kolik vzniklo nových kolizí: dvojic $x \in S_{<i}$, $y \in S_i$ t.ž. $g(x) \oplus \underbrace{a_{g(x)}}_{a_{v_j} \text{ pro nějaké } j<i} = g(y) \oplus \underbrace{a_{g(y)}}_{= a_{v_i}}$

$\Updownarrow$

$a_{v_i} = g(x) \oplus g(y) \oplus a_{g(x)}$

… to nastane s pstí $\frac{1}{2^r}$

$\mathbb{E}[\#NK] = |S_{<i}| \cdot |S_i| \cdot 2^{-r}$

$\downarrow$

za $O(1)$ pokusů najdu $a_{v_i}$, pro které $\#NK \le \lfloor 2 \cdot \mathbb{E}[\#NK] \rfloor$ ← je to celé číslo

$\phantom{\#NK \le \lfloor 2 \cdot \mathbb{E}[\#NK] \rfloor} = |S_{<i}| \cdot |S_i| \cdot 2^{1-r}$

• Jak to udělat efektivně? • Udržujeme $m_t :=$ kolik bodů jsme už umístili do $t$-tého sloupce … tedy $|\{x \in S_{<i} \mid g(x) \oplus a_{g(x)} = t\}|$.

• Na počátku setřídíme $S$ podle $(f(x), g(x))$ lexikograficky … $O(n + 2^r)$

↳ pořadí $S_1 \ldots S_{2^r}$ dalším přihrádkovým tříděním

• Pro každou $S_i$ zvolíme $a_{v_i}$, pak pro $\forall x \in S_i$ spočítáme pomocí $m_*$ kolize } $O(|S_i|)$ $\times O(1)$ průměrně pokusů

… až najdeme správné $a_{v_i}$, přepočítáme $m_*$ } $O(|S_i|)$

$2^r$-krát

↳ v součtu přes všechna $i$ $O(n) + 2^r$ průměrně

• Jak dobrý pár jsme vyrobili?

Pro původní pár $(f,g)$: $\#$ kolizí fce $f = \sum_i \binom{|S_i|}{2} \le q$ ← shora omezeno tímto

Pro nový pár počítáme kolize fce $x \mapsto g(x) \oplus a_{f(x)}$:

$$\text{kolizí} \le \sum_{i=1}^{2^r} \lfloor \underbrace{2^{1-r} \cdot |S_i| \cdot |S_{<i}|}_{\text{už víme}} \rfloor \le \sum_{i=1}^{t} \lfloor 2^{1-r} \cdot \underbrace{|S_i| \cdot |S_{<i}|} \rfloor \le \sum_{i=1}^{t} \lfloor 2^{3-r} \sum_{j<i} \binom{|S_j|}{2} \rfloor \le n \cdot \lfloor 2^{3-r} \cdot q \rfloor.$$

dokonce $=$

$|S_i| \cdot \sum_{j<i} |S_j| = \sum_{j<i} |S_i| \cdot |S_j| \le \sum_{j<i} |S_j|^2 \le 4 \cdot \binom{|S_j|}{2}$ jelikož $|S_j| \ge 2$

vynecháme členy, pro které $|S_i| \le 1$ … $|S_{<i}| < 2^{r-1}$ díky volbě $r$, takže $\lfloor \ldots \rfloor = 0$

$t := \max\{i \mid |S_i| > 1\}$

pokud $|S_i| = 0$, je celý součin triviálně 0, pro $|S_i| = 1$ víme $|S_{<i}| < 2^{r-1} \Rightarrow \lfloor \ldots \rfloor = 0$.

$2^{1-r} \le \frac{1}{n}$, takže $(\ldots) \le |S_i|$

$\to \sum_i (\ldots) \le n$

(to je druhá část min(…) z tvrzení lemmatu)

# Derandomizace

- Obecný trik: Hledáme $z$: $T(z) \le \mathbb{E}[T]$ — T je obecně nějaká náhodná veličina, tedy funkce jen z $z$ členu.

  Postupně fixujeme části $z$ tak, aby $\mathbb{E}[T \mid \text{fixovaná část}]$ nerostla.

  Využíváme toho, že $\mathbb{E}[T] = P(\alpha)\cdot \mathbb{E}[T\mid\alpha] + (1-P(\alpha))\cdot\mathbb{E}[T\mid\neg\alpha]$.

  V našem případě bude $P(\alpha)=\frac{1}{2}$, takže stačí vybrat menší z $\mathbb{E}[T\mid\alpha]$ a $\mathbb{E}[T\mid\neg\alpha]$.

- Původní randomizovaný krok vypadal takto:
  - máme tabulku všech $m_t$ a (multi)množinu $X \subseteq [R]$ — ta hraje roli $\{g(x) \mid x \in S_i\}$
  - hledáme $a \in R$ t.ž. $\sum_{x\in X} m_{x\oplus a} \le \lfloor 2^{1-r}\cdot|X|\cdot \underbrace{\sum_t m_t}_{\text{to je } |S_{<i}|} \rfloor$

    randomizovaně jsme to uměli v $O(|X|)$ průměrně, ukážeme, jak deterministicky v $O(|X|\cdot r) = O(|X|\cdot\log n)$ $\Rightarrow$ sečte se na $O(n\log n)$

- Postupně fixujeme bity čísla a od nejvyššího a přepočítáváme $\mathbb{E}[\#\text{kolizí} \mid \pi_k(a) = A]$ (prefix délky k)

  … stále tuto $\mathbb{E}[\dots]$ udržujeme pod původní $\mathbb{E}[\dots]$, stačí ji umět rychle spočítat.

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{x\in X} m_{x\oplus a} \,\Big|\, \pi_k(a)=A\Big] = \sum_{x\in X}\mathbb{E}\big[m_{x\oplus a}\mid \pi_k(a)=A\big] = \sum_{x\in X}\underbrace{\mathbb{E}\big[m_t \mid \pi_k(t)=\pi_k(x)\oplus A\big]}_{\text{průměr všech } m_t \text{ pro daný prefix } \pi_k(t)}$$

Budeme udržovat intervalový strom nad všemi $m_t$:


vrchol si pamatuje součet listů v podstromu

Strom uložíme do pole jako haldu
- přepočítání $m_i$ v $O(r)$
- dotaz na $\sum$ listů pro daný prefix v $O(1)$

$\Rightarrow$ • 1 krok derandomizace zvládneme v $O(|X|)$ … prefixy počítáme v $O(1)$ bitovými operacemi

- celou volbu a zvládneme v $O(|X|\cdot r)$
- pak v $O(|X|\cdot r)$ aktualizujeme strom

} celý algoritmus běží v $O(nr) = O(n\log n)$.