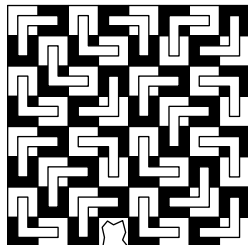


Indukce

Pokrytí šachovnice – elka (5 bodů)

Na šachovnici $2^n \times 2^n$ jedno políčko chybí. Dokažte, že zbylou plochu lze vydláždit dlaždicemi tvaru „L“, které zabírají 3 políčka. Třeba takto:



Krájíme rovinu – cutp (5 bodů)

Mějme n přímk v rovině takových, že každé dvě se protínají v právě jednom bodě a žádné tři nemají společný bod. Dokažte, že přímky rovinu rozdělují na právě $1 + n(n + 1)/2$ částí.

Krájíme prostor – cuts (8 bodů)

Na kolik částí může rozdělit trojrozměrný prostor n rovin?

Součet třetích mocnin – cube (10 bodů)

Vymyslete vzorec pro součet $c_n = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$. Návod: uhadněte, že se jedná o polynom 4. stupně, dopočítejte podle c_0, \dots, c_4 jeho koeficienty a pak dokažte indukcí, že vzorec platí pro všechna n .

Fibonacciho formule – fib (8 bodů)

Dokažte, že pro Fibonacciho čísla platí:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Fibonacciho dělitelnost – fidiv (7 bodů)

Dokažte, že $4n$ -té Fibonacciho číslo je dělitelné třemi.