

Příklady z Diskrétní matematiky 2017-11-13

Inkluze a exkluze

Eratosthénovo síto

Kolik zbude z čísel $1, \dots, n$ po vyškrtání všech násobků 2, 3 a 5? A co když budeme škrtnat násobky 4, 6 a 9?

Helmův žleb

K pevnosti v Helmově žlebu postupují skřeti. V úzké chodbičce za branou na ně s napětím čekají bojovníci: 3 elfové, 2 trpaslíci a 5 lidí. Kolik je možností, jak si mohou stoupnout do řady, aniž by všichni příslušníci téže rasy stáli u sebe? Jak se odpověď změní, pokud bytosti téže rasy nebudou rozlišitelné?

Méně zmatená šatnářka

Kolik je permutací na množině $\{1, \dots, n\}$ s právě jedním pevným bodem?

Eulerova funkce

Označme $\varphi(n)$ počet čísel z $\{1, \dots, n-1\}$, která jsou nesoudělná s n . Dokažte, že je-li $p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ prvočíselný rozklad čísla n , platí:

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$