

*Kombinační čísla***Stověžatá**

Kolika způsoby můžeme na šachovnici 100×100 rozmístit 100 věží tak, aby se navzájem neohrožovaly? Co když je věží jenom k ? Co když jsou věže rozlišitelné?

Binomická věta

Vyzkoušejte si binomickou větu na následujících příkladech. Pokaždé vznikne zajímavá identita s kombinačními čísly:

- a) $(1 + 1)^n$
- b) $(1 - 1)^n$
- c) $(1 + 2)^n$
- d) $(1 + i)^n$

Přesmyčky

Kolik přesmyček (i nesmyslných) má slovo Mississippi? Ukazovali jsme si, že to souvisí s multinomickými koeficienty a že všech řetězců z n písmenek, kde i -té písmenko se má vyskytnout c_i -krát, je právě

$$\binom{c_1 + \dots + c_k}{c_1, \dots, c_k} = \frac{(c_1 + \dots + c_k)!}{c_1! \cdot \dots \cdot c_k!}.$$

Vytýkání z kombinačního čísla

Dokažte, že platí

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1} \quad \text{pro } n \geq k \geq 1.$$

Kombinatorickou úvahou se snáze dokazuje rovnost

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

(Interpretace: Jak z n vesničanů může povstat banda k zbojníků s náčelníkem?)

Loupežnická banda

Jiný příklad s podobnou interpretací:

$$\sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k}.$$

Vnořené podmnožiny

Kolik existuje dvojic (A, B) množin, pro které platí $A \subseteq B \subseteq \{1, \dots, n\}$?

Něco navíc:

Šotek

Chystá se další vydání nejmenovaných novin. Tiskařský šotek může v každém z n článků buď napáchat překlep, nebo vyměnit popisek u obrázku. Kolika způsoby může šotek provést k chyb tak, aby v každém článku spáchal nejvýše jednu? Co když může být k libovolné?