Příklady z Diskrétní matematiky 2017-10-23

Relace a funkce

Skládání funkcí

a) Jsou-li f, g prosté funkce, je $f \circ g$ také prostá?
b) Jsou-li f a g funkce na, je $f \circ g$ také na?
c) Je-li f prostá a g libovolná, je $f \circ g$ nebo $g \circ f$ také prostá?
d) Je-li f na a g libovolná, je $f \circ g$ nebo $g \circ f$ také na?
e) Je-li $f \circ g$ prostá, musí být f nebo g prostá?
f) Je-li $f \circ g$ na, musí být f nebo g na?
g) Každá funkce f se dá zapsat jako $g \circ h$, kde g je na a h prostá.

Ekvivalenční třídy

U následujících relací nahlédněte, že jsou to ekvivalence, a popište jejich ekvivalenční třídy:

a) Pro $A, B \subseteq \{1, \ldots, n\}$: existuje bijekce mezi A a B.
b) Pro $x, y \in \mathbb{Z}$: $x - y$ je násobkem 7.

Relace dělitelnosti

Uvažujme relaci $x \setminus y$ (x je dělitelem y) na množině $\{1, \ldots, n\}$.

a) Dokažte, že je to uspořádání. Je lineární?
b) Nakreslete Hasseův diagram (třeba pro $n = 13$).
c) Jak vypadají nejmenší, největší, minimální a maximální prvky?
d) Jak vypadají řetězce a antiřetězce?
e) Jak se odpovědi na předchozí otázky změní odstraněním prvku 1?

Uspořádání na objednávku

Sestrojte uspořádání s následujícími vlastnostmi:

a) žádný minimální ani maximální prvek
b) žádný největší, ale aspoň 1 maximální
c) žádný největší, ale právě 1 maximální
d) nekonečně mnoho minimálních prvků a 1 maximální

Něco navíc:

Lexikografické uspořádání (slovník)

Mějme lineární uspořádání $\leq$ na množině X. Definujeme relaci $\preceq$ na X^2 následovně:

$$(x, y) \preceq (x', y') \equiv (x < x') \vee (x = x' \wedge y \leq y').$$

Dokažte, že tato relace je také lineární uspořádání. Jak vypadá jeho nejmenší a největší prvek? Jak definici rozšíříme pro X^k?

Součin uspořádání (ledničky)

Jedna lednička je evidentně lepší než druhá, pokud dosahuje současně nižší teploty a nižší spotřeby elektřiny. Obecněji: Mějme (částečná) uspořádání $\leq_X$ na X na $\leq_Y$ na Y. Definujeme relaci $\preceq$ na $X \times Y$ takto:

$$(x, y) \preceq (x', y') \equiv (x \leq_X x') \wedge (y \leq_Y y').$$

Dokažte, že tato relace je také uspořádání. Kdy je lineární?

Isomorfismus relací

Řekneme, že relace R na množině A je isomorfní relaci S na množině B právě tehdy, když existuje bijekce $f : A \to B$ taková, že pro každé $x, y \in A$ je $xRy \Leftrightarrow f(x)Sf(y)$.

a) Všimněte si, že isomorfismus dvou uspořádání přenáší i nejmenší, největší, minimální a maximální prvky.
b) Dokažte, že všechna lineární uspořádání na konečné množině jsou isomorfní.
c) Platí to i pro částečná uspořádání?
d) Dokažte, že uspořádání $\subseteq$ na $\mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})$ je isomorfní n-té mocnině uspořádání $\leq$ na $\{0, 1\}$.