Úsporné datové struktury

- Chceme uložit prvek množiny C (třeba jeden ze stromů na n vrcholech) a použít téměř optimální prostor ... $OPT = \lceil \log |C| \rceil$ bitů } entropie při rovnoměrném rozdělení psti
- Přitom chceme rychlé operace
- Varianty:
  - implicitní DS – jen data sama ve vhodném pořadí (setříděné pole, halda)] $OPT + O(1)$ ↑ rounding &c.
  - úsporné (succinct) DS – $OPT + o(OPT)$
  - kompaktní DS – $O(OPT)$ ... ale pozor, třeba BVS nemusí být kompaktní kvůli pointerům – nepočítáme slova, ale bity! (nebo trie)

Problém: Reprezentace řetězce nad obecnou abecedou

Příklad: $[10] \to 4$ bity ($\log 10 \doteq 3.322$)
$[10]^2$ ... mohu uložit jako 2×4b, nebo jako $[100] \to 7$ bitů
$[10]^k$ ... uložím jako $[10^k] \to k \cdot \log 10 + 1$ namísto $k \cdot (\log 10 + 1)$
↳ limitně se blížím k $\log 10$ b/znak (redundance = délka kódu − entropie jde k 0)
... ale ztrácím lokální dekódovatelnost

Praktické řešení: dělím na bloky o 9 znacích ... délka kódu = 30
entropie $9 \cdot \log 10 \doteq 29.897$
→ redundance $\doteq 0.103$

Blok se vejde do 1 slova → počítám s ním v $O(1)$ času i prostoru

↳ pro string délky n: $30 \cdot \lceil n/9 \rceil \leq 30/9\, n + 30$
↳ redundance $\leq 0.103 \cdot \frac{n}{9} + 30$

↳ ☺ $(a,b) \in X \times Y$ kóduji po složkách ⇒ délky kódů i entropie se sečtou → redundance také

Příklad #2: Posíláme proud bitů, ale dopředu nevíme, jak bude dlouhý. → instantní (prefixový) kód
[potřebujeme umět zakódovat značku pro konec, aniž by neustálé "ještě to pokračuje" zabralo dost místa]

Triviální řešení: rozdělíme na bloky o b bitech, za ∀ blok připíšeme 1 bitovou značku
↳ redundance $\frac{n}{b} + b + 1$

SOLE Encoding [Dodis, Pătrașcu, Thorup 2010]
(Short-Odd-Long-Even)

- vstup rozdělíme na bloky o b bitech → prvky abecedy $[B]$ pro $B = 2^b$
- poslední blok dopadujeme (10——0 na konec), ale potřebujeme přidat spec. blok označující EOF
  ↳ převod: $[B+1]^* \to [B]^*$
- nastavíme $b \geq 2\log n + 2 \Rightarrow B \geq 4n^2$] bloky se vejdou do $O(1)$ slov RAMu

Číslo bloku	1.	2.	3.	4	5.	6	...	k
vstupní abeceda	B	B	B	B	B	B	...	EOF
+ EOF	B+1	B+1	B+1	B+1	B+1	B+1		B+1
1. průchod	B	B+3	B−3	B+6	B−6	B+9	...	0
2. průchod	B	B	B	B	B	B	...	

Sem si domyslíme nulový blok

1. průchod: $(B+1)(B+1) \leq (B-3i)(B+3i+3)$

$$\cancel{B^2}+2B+1 \leq \cancel{B^2}+\cancel{3Bi}+3B-\cancel{3Bi}-9i^2-9i$$

$$-B+1 \leq -9i^2-9i$$

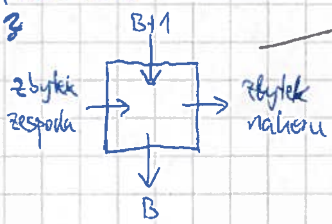
$$B-1 \geq 9i^2+9i$$

$$B \geq 9i^2+9i+1, \quad \text{neboť } i \leq \tfrac{n+1}{2} \text{ a } B \geq 4n^2$$

2. průchod: $(B+3i)(B-3i) = B^2-9i^2 \leq B^2$

- redundance $\leq 3b$ (1 blok zaokrouhlení + 1 EOF + 1 extra na lichý # bloků)
- proudové kódování + dekódování
- lokální dekódování i změny v $O(1)$ na RAMu [potřebuji $\Theta(\log n)$ bitů] ↳ $O(1)$ slov

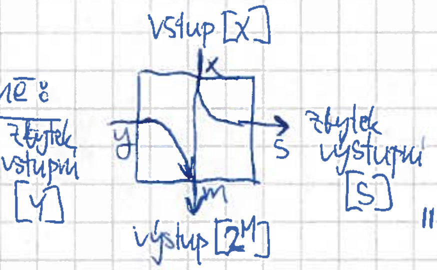
Postupně z toho odvodíme obecnou konverzi abeced...
- proč to vlastně fungovalo?



zaokrouhlení na celé bity je příliš redundantní

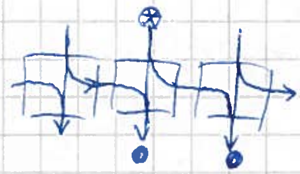
nechám zbýt malé množství informace a to v příštím kroku přimíchám k většímu, čímž snížím redundanci ... zbytky se posílají jen do omezené vzdálenosti → lokálně dekódovatelné

Obecně:



"MIXÉR"

... při řetězení stále lok. dekódovatelné



pro dekódování ⊛ stačí znát oba ●

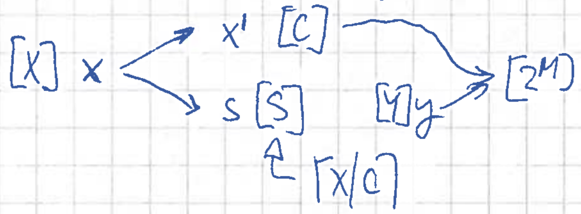
Lemma: Nechť $X, Y \leq 2^w$. Pak $\exists M, S$ a zobrazení $f: [X] \times [Y] \to [2^M] \times S$ t.ž.:

1. $S = O(\sqrt{X})$, $2^M = O(Y \cdot \sqrt{X})$ a S, M závisí pouze na X, Y
2. f lze vyhodnotit (na RAMu) v čase $O(1)$
3. x lze dekódovat z m, s v $O(1)$
4. y lze dekódovat ze samotného m v $O(1)$
5. Redundance je $O(1/\sqrt{X})$ bitů

$$\underbrace{(M+\log S)}_{\text{entropie výstupu}} - \underbrace{(\log X + \log Y)}_{\text{entropie vstupu}}$$

Dk: Zvolíme M (později)

↳ $[2^M]$ musí obsahovat celé y a nějakou část x' čísla x ... jakou? $C := \lfloor 2^M/Y \rfloor$ možností



• redundance ~~...~~ kódování $x', y \to m$:

$$R_1 = M - \log(\underbrace{Y\cdot C}_{\log(Y\cdot\lfloor\frac{2^M}{Y}\rfloor)}) \le M - \log(2^M - Y) = \log\frac{2^M}{2^M-Y} = \log\frac{1}{1-\frac{Y}{2^M}} = O\left(\frac{Y}{2^M}\right) = O\left(\frac{1}{C}\right)$$

$$\underbrace{Y\cdot\left\lfloor\frac{2^M}{Y}\right\rfloor}_{\ge 2^M - Y}$$

$e^x \ge 1+x$

$x \ge \log(1+x)$

$-x \le \log\frac{1}{1+x}$

$x \ge \log\frac{1}{1-x}$

• redundance rozkladu $x \to x', s$:

$$R_2 = (\log C + \log S) - \log X = \log C + \log\lceil X/C\rceil - \log X = \log\frac{C\cdot\lceil X/C\rceil}{X} \le \log\frac{X+C}{X} = \log\left(1+\frac{C}{X}\right) = O\left(\frac{C}{X}\right).$$

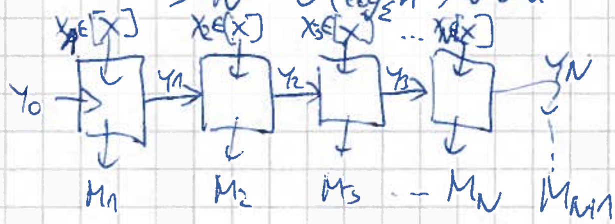
• celkem tedy minimalizujeme $O\left(\frac{1}{C}+\frac{C}{X}\right)$ ... $C \approx \sqrt{X} \to S = O(\sqrt{X})$, $2^M = O(Y\cdot\sqrt{X})$

→ redundance $O(1/\sqrt{X})$, jak jsme slíbili. [nezávisí na Y]

První pokus o reprezentaci stringu

$A \in [\Sigma]^n$ ... rozdělíme na bloky o velikosti $\Theta(\log_\Sigma n)$ tak, aby $X \approx n^2$

$\Rightarrow N = O\left(\frac{n}{\log_\Sigma n}\right)$ bloků



... redundance $O\left(\frac{1}{n}\right)$ v každém bloku

↳ celkově $O(1)$, což je milé

... lokální kódování/dekódování

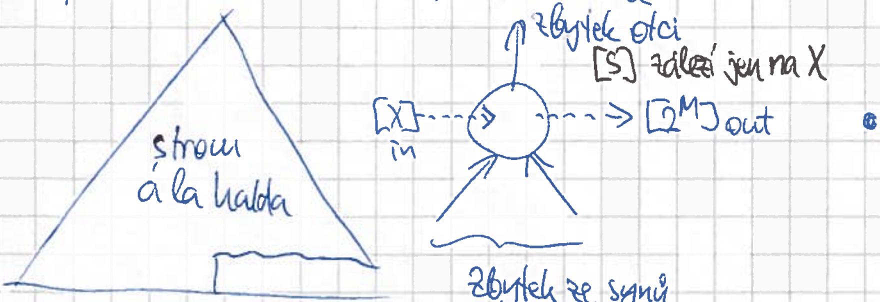
OOPS! Každý blok má jiné parametry!

→ potřebujeme tabulku $O\left(\frac{n}{\log n}\right)$ konstant!

↳ tohle v SOLE nevadilo, protože $X = 2^b+1$, takže jsme jednotlivá Y_i uměli aproximovat aritmetickou posloupností ... ale obecně to nebude fungovat

Záchrana: stromové kódování

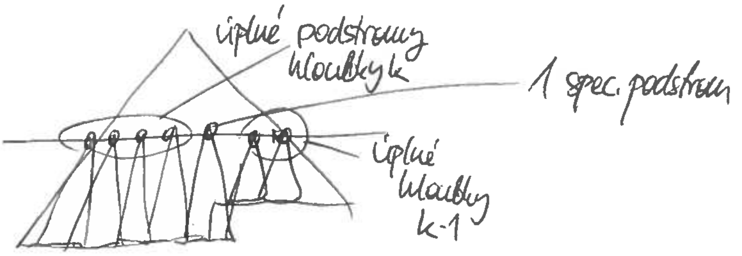
Opět volíme $X := \Theta(n^2)$, $N = O\left(\frac{n}{\log_\Sigma n}\right)$



$[Y_1]\times[Y_2] \cong [Y_1\cdot Y_2]$

• dekódování je stále lokální

(z otce stačí out, ten určuje zbytek)



na každé hladině 3 typy vrcholů
pro ně si pamatujeme:

- # vrcholů tohoto typu
- adresu dat 1. vrcholu
- parametry mixéru

celkem $O(\log n)$ konstant (slov)

Dekódování: pozice ve streamu → číslo bloku = pozice ve stromu

$\log i$ (v čase $O(1)$)

adresa v paměti ← typ ← hladina

Vše $O(1)$

Lokální změna též v $O(1)$.

Celková redundance $O(1)$ [jako u předch. pokusu] + $O(1)$

$O(1)$ za kódování bloků

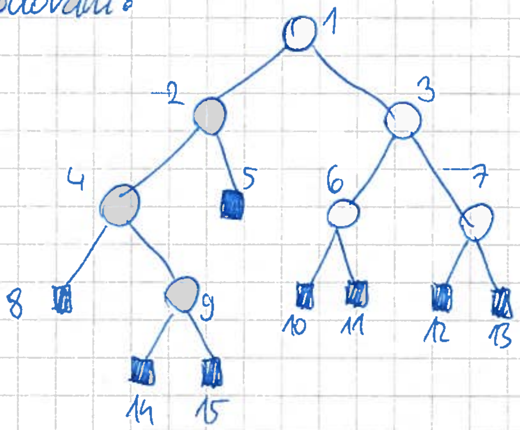
$O(1)$ zaokrouhlení posledního (neúplného) bloku (ten kódujeme atypicky)

Věta: Na Word-RAMu lze reprezentovat prvek $[\Sigma]^n$
v prostoru $\lceil n \log \Sigma \rceil + O(1)$ bitů
se čtením/zápisem prvku v čase $O(1)$
s použitím $O(\log n)$ konstant závislých na n a Σ.

Úsporná reprezentace binárních stromů

- chceme uložit strukturu stromu, umět hledat syny, otce atd.
- bin. stromů s n vrcholy existuje $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \approx 4^n / \mathrm{poly}(n)$
  $\hookrightarrow 2n + o(n)$ bitů

- kódování:



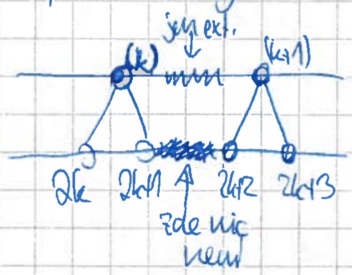
- přidáme externí vrcholy
- všechny vrcholy očíslujeme po hladinách à la halda
- za $\forall$ vrchol zapíšeme 1 bit $\begin{cases} 0 & \text{pro externí} \\ 1 & \text{pro interní} \end{cases}$
  $\downarrow$
  $2n+1$ bitů

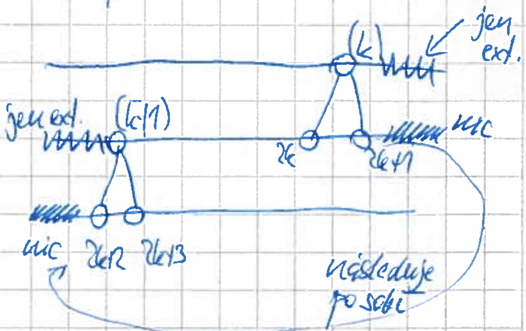
- adresace:

Lemma: Synové k-tého vnitřního vrcholu leží na pozicích $2k$ a $2k+1$,
k-tého … počítáno od 1 po hladinách; $2k$ a $2k+1$ … opět od 1

Dk: Indukcí podle k: Pro $k=1$ triviálně platí.

$k \to k+1$ … ① $k, k+1$ na stejné hladině ② přes hladinu





- Redukujeme na Rank_1 a Select_1 v posloupnosti $N = 2n+1$ bitů

$\mathrm{Rank}_1(i)$ = počet jedniček na pozicích $1 - i$

$\mathrm{Select}_1(i)$ = pozice i-té jedničky

- z toho: $\mathrm{Left}(i) = 2 \cdot \mathrm{Rank}_1(i)$ — (vstup i výstup jsou pozice v posl. vrcholů)

$\mathrm{Right}(i) = \mathrm{Left}(i) + 1$

$\mathrm{Parent}(i) = \mathrm{Select}_1(\lfloor i/2 \rfloor)$

Rank

n bitů

... pro ∀ blok předpočítáme #1 v předchozích blocích

$$\underbrace{\frac{n}{L^2}}_{\text{bloků}} \cdot \underbrace{L}_{\text{bitů na \#1}} = \frac{n}{L} \in o(n)$$

bloky o $L^2 = \log^2 n$ bitech

podbloky o $\frac{1}{2}L$ bitech

pro ∀ podblok předpočítáme #1 v předch. podblocích téhož bloku

$$\frac{n}{L} \cdot \underbrace{\log(L^2)}_{\approx LL = \log\log n} \in o(n)$$

dekompozice...
předpočítáme odpovědi na všechny dotazy

$$\underbrace{2^{\frac{1}{2}L}}_{\text{možných obsahů bloku} = \sqrt{n}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}L}_{\text{možných dotazů}} \cdot \underbrace{LL}_{\text{velikost odpovědi}} \approx \sqrt{n} \cdot L \cdot LL \in o(n)$$

Select

rozdělíme po $L \cdot LL$ jedničkách a zaznamenáme jejich pozice + pointery na substruktury

$$\underbrace{\frac{n}{L \cdot LL}}_{\#\text{ částí}} \cdot \underbrace{2L}_{\text{pozice + pointer}} = \frac{2n}{LL} \in o(n)$$

blok r bitů s $L \cdot LL$ jedničkami

$r \geq (L \cdot LL)^2$:

uložíme pozice všech 1

$$\underbrace{\frac{n}{(L \cdot LL)^2}}_{\text{max. \# takových bloků}} \cdot \underbrace{L \cdot LL}_{\#1 \text{ v bloku}} \cdot \underbrace{L}_{\text{pozice}} = \frac{n}{LL} = o(n)$$

$r < (L \cdot LL)^2$:

ještě 1x totéž, tentokrát každá LL^2-tá 1

$$\underbrace{\frac{n}{LL^2}}_{\#\text{ částí celkem}} \cdot \underbrace{O(LL)}_{\text{pozice uvnitř bloku + pointer na substrukturu}} \in O\left(\frac{n}{LL}\right) \in o(n)$$

podblok r' bitů s LL^2 jedničkami

$r' \geq LL^4$:

uložíme pozice všech 1 relativně k bloku

$$\underbrace{\frac{n}{LL^4}}_{\text{max. \# bloků (pod-)}} \cdot \underbrace{LL^2}_{\#1 \text{ v podbloku}} \cdot \underbrace{O(LL)}_{\text{pozice}} \in O\left(\frac{n}{LL}\right) \subseteq o(n)$$

$r' < LL^4$:

pro dost velké n je $r' < \frac{1}{2}L$
⇓
předpočítáme pro všechny tvary podbloku

$$\underbrace{2^{\frac{1}{2}L}}_{\text{tvarů}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}L}_{\text{dotazů}} \cdot \underbrace{LL}_{\text{odpověď}} \in O\left(\frac{n}{LL}\right) \subseteq o(n).$$

Celkově $\Theta(n)$ bitů navíc
Čas: $\Theta(n)$ předvýpočet
$\Theta(1)$ dotaz