Dynamické lineární uspořádání

List Order Problem – Chceme udržovat posloupnost prvků
- Operace: • Insert nového prvku za zadaný
  • Compare – odpoví, zda je x před y … chceme v $O(1)$
  • možná také Delete (lze via glob. přestavba)

řeší se pomocí ↓

List Labelling – Posloupnost prvků, každému přidělena značka, značky rostou zleva doprava
- Insert, Delete mohou přeznačovat

① exponenciální rozsah značek, předem víme max. # prvků M

- první prvek dostane 2^M
- druhý buď 0 nebo 2^{M+1}
- každý další je průměr sousedů

} nikdy není třeba přeznačovat, lze $O(1)$ w.c.
↓ použitelné pro $M = O(\text{word size})$

② polynomiální rozsah značek

- BVS, značka = pos. L/P na cestě z kořene do prvku – $\Theta(\log n)$ bitů → poly rozsah
- BS-α stromy přepočítávají značky během rekonstrukcí → $\Theta(\log n)$ amort. na Ins/Del
  ↳ pozor, rotace jsou drahé!

③ Lineární rozsah – Ordered File Maintenance → pořád umíme $O(\log^2 n)$ amort

→ lze zrychlit indirekcí: bloky velikosti $\Theta(\log n)$, v nich ①
② nad bloky ($\Theta(n/\log n)$ bloků)
stojí $O(1)$ amort.

Insert v ① způsobí $O(1/\log N)$ amort. operací ve ②
⇒ ② stojí $O(1)$ amort., ① taktéž.

} label je dvojice, porovnáváme lexikograficky → Compare v $O(1)$ w.c.

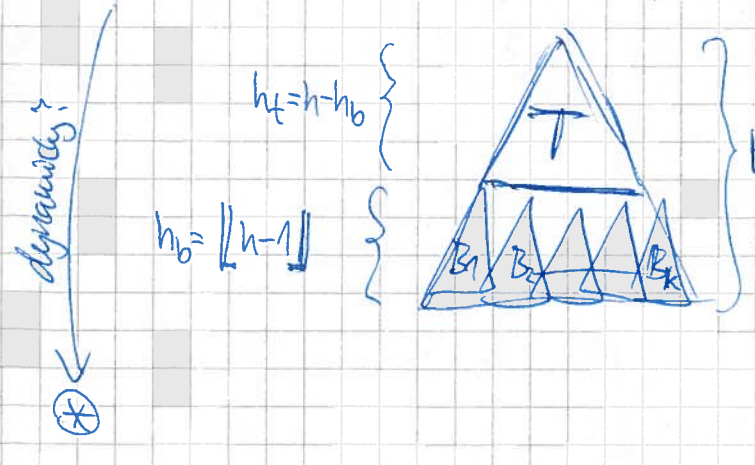
[Pozor, 1 změna ve ② může $\Theta(\log n)$ dvojic, ale to lze udělat najednou]

Cache-Oblivious datové struktury

- I/O model, parametry B (velikost bloku), M (velikost cache)
- C/O model – parametry neznáme, cache se obsluhuje optimálně

} Dílmo počítáme jen čtení

- cache-aware (I/O): (a,b)-strom s $a, b \in \Theta(B)$ → $\Theta(\log n / \log B)$ I/o na operaci
- cache-oblivious: statický úplný BVS ve van Emde-Boasově uložení



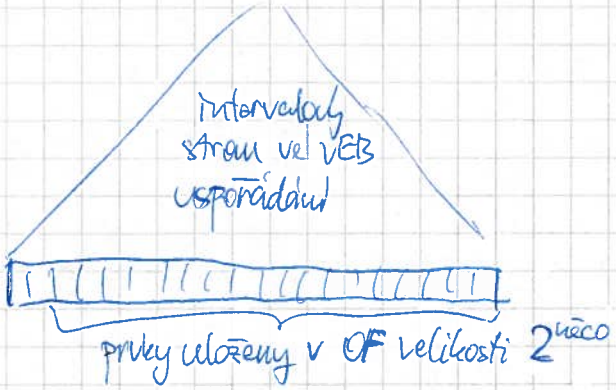
Nejprve T, pak B_1 – B_k l
lze rekurzivně…

Věta: Průchod kořen–list vyžaduje $\Theta(\log_B N)$ I/O

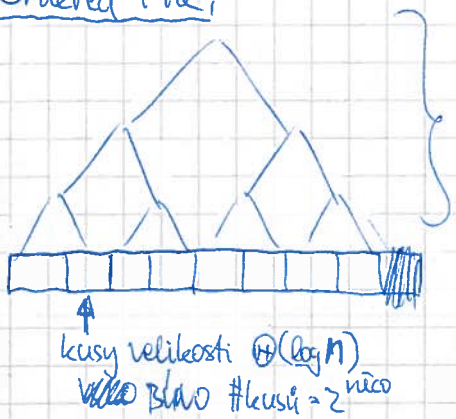
Náčrtek Dk: "zaostříme" na úroveň rozkladu, kdy se strom poprvé vejde do bloku
⇒ má hloubku $\Theta(\log B)$
⇒ na cestě takových projdeme $\Theta(\log N / \log B)$

⊛ ↳ zkrátíme Ordered File s vEB uspoř. BVS:

- Find je plně v režii stromu
- Insert vloží do OF, to způsobí přečíslování nějakého intervalu klíčů ⇒ dálkový update stromu



Ordered File:



každý interval má kapacitu $\log N \cdot 2^{h-i}$
(h = hloubka stromu, i = hloubka vrcholu)
a hustoty ϱ = #prvků / kapacita

Standardní hustota $\left[\frac{1}{2} - \frac{i}{4h}, \frac{3}{4} + \frac{i}{4h}\right]$

v kořeni ($i=0$) $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$
v listech ($i=h$) $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ ↑ čím vyšší, tím přísnější

Insert (Delete analogicky):

- vložím do příslušného kusu ($O(\log n)$, úplně ho přepíšu)
- pokud má stále std hustotu, končím
  jinak jdu nahoru a hledám první interval se std hustotou

vejdu → přerozdělím celý interval rovnoměrně

nevejdu → zvětším strukturu → zvětším c-krát pro nějaké $c \in (1,2)$ [vyjde to pro $c = 6/5$]

pole bude stoupat nezávisle po mocninách dvojky

Amortizace: Nechť přerozdělujeme interval v hloubce i, který má kapacitu K.
Jeho ~~[illegible]~~ $\varrho \le \frac{3}{4} + \frac{1}{4h}$, alespoň 1 syn má $\varrho > \frac{3}{4} + \frac{i+1}{4h}$

~~[illegible]~~
po minulém přerozdělení otce měl ϱ stejnou jako otec ⇒ vzrostla o alespoň $1/4h$ ⇒ v podstromu přibylo alespoň $\Theta(K/h)$ prvků

Přerozdělení stojí $\Theta(K)$
⇓
účtujeme $\Theta(h) \subseteq \Theta(\log n)$ jednomu prvku
⇓
↯ prvek přispěje na přerozdělování v celkem $\log n$ úrovních, tedy celkově $O(\log^2 n)$

Cache-oblivious: Hledání + přerozdělování prvků jsou 2 prolínané scany (popředu + popředku) ⇒ ~~[illegible]~~ $O(K/B)$ bloků, $O(\log^2 n / B)$ na prvek.

Zpět k C/O strukturám

Insert: $O(\log^2 n)$ času, $O(\log^2 n / B)$ I/O na update OFM
+ $O(\#\text{změněných prvků v OFM} + \log n / \log B)$ na dávkový update VEB → amortizovaně se schová do ceny OFM + $\log n / \log B$

Find: $O(\log n)$ času, $O(\log^2 n / B)$ I/O na VEB

Zrychlení ... jako obvykle nadstavbou: Fragmenty velikosti $F = \Theta(\log n)$, nad jejich reprezentanty původní struktura

- umístit fragmentu vše v čase $O(\log n)$ a $O(\log n / B)$ I/O
- jednou za amort. $O(1/F)$ operací provedeme $O(1)$ operací na pův. struktuře
  ⇒ jedna stojí amort. $O(\log n)$ času a $O(\log n / \log B)$ I/O
  [$\log n / B$ z OFM + $\log n / \log B$ z VEB]
- dotazy: nejprve ve VEB, pak sekvenčně fragment: $O(\log n)$ času, $O(\log n / \log B)$ I/O
- jednou za čas globální přestavba, abychom udrželi $F = \Theta(\log n)$ apod.

→ Asymptoticky stejně rychlé jako C/A B-stromy, ale je to C/O.