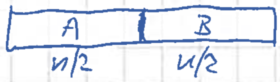
Předehra: Intervalové dotazy v pologrupách

$(X, \oplus)$, $\oplus$ je asociativní
příklady: min, +, ·, násobení matic...

Chceme statickou DS, která pro $x_1 — x_n \in X$ umí rychle vyhodnocovat $x_i \oplus x_{i+1} \oplus \dots \oplus x_j$

Df: $f_i(n)$:= kolik prostoru stačí, abychom uměli dotaz vyhodnocovat pomocí i operací $\oplus$
(čas na předvýpočet bude vycházet ~stejný)

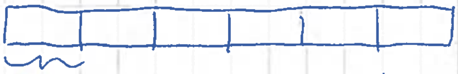
- $f_0(n) = \Theta(n^2)$ ... předpočítáme všechno
- $f_1(n)$ ... rekurzivní konstrukce



- dotazy přes střed: px + sx součty (sx pro A, px pro B)
- ostatní: rekurze na A nebo B

$$\left.\begin{array}{l} f_1(n) = n + 2\cdot f_1(n/2) \\ f_1(1) = 0 \end{array}\right\} f_1(n) = n \log n$$

- $f_2(n)$ ... nic zajímavého
- $f_3(n)$ ... opět rekurzivně



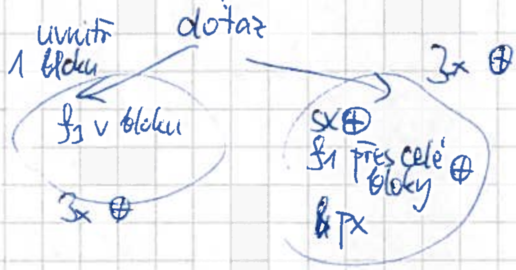
bloky velikosti b → n/b bloků

- px + sx v každém bloku
- f_3 v každém bloku
- f_1 pro posloupnost součtů bloků

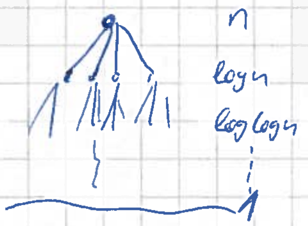
$$f_3(n) = 2n + f_1(n/b) + \frac{n}{b}\cdot f_3(b)$$

$2n$: px + sx součty; $f_1(n/b)$: kompr. bloky; $\frac{n}{b}\cdot f_3(b)$: vnitřky bloků

volbou $b := \log n$ bude $f_1(\frac{n}{b}) \le n$



tedy $f_3(n) \le 3n + \frac{n}{\log n}\cdot f_3(\log n)$
$f_3(1) = 0$



Σ přes každou hladinu $= n$

$f_3(n) \le 3n \cdot \log^* n$

- Obecně: $f_{2k+1}(n) \le (2k+1)\, n \log^{\overbrace{*\dots*}^{k}} n$

[dokážeme indukcí zobecněním postupu pro f_3]

- Optimum:

$\alpha(n) := \min\{k \mid \log^{\overbrace{*\dots*}^{k}} n \le 2\}$

pak pro $k = \alpha(n)$ získáme:

Předzpracování v $O(n \cdot \alpha(n))$

Dotaz v $O(\alpha(n))$ ← nutno domyslet, jak vše stihnout (zatím jsme dokázali, že stačí tolikrát vyhodnotit $\oplus$)

příklady:

g	g^*
$n-1$	$n-1$
$n-2$	$n/2$
$n-3$	$n/3$
$n/2$	$\log n$
n/c	$\log_c n$
$\sqrt{n}$	$\log\log n$
$\log n$	$\log^* n$ ☺

Obecně:

$$f(n) = kn + \frac{n}{g(n)}\cdot f(g(n))$$
$$\Downarrow$$
$$f(n) = kn \cdot g^*(n)$$

kde $g^*(n) = 0$ pro $n \le 1$
$g^*(n) = 1 + g^*(g(n))$ pro $n > 1$

tedy $g^*(n) = \min\{i \mid g^{(i)}(n) \le 1\}$

(def. pro g: $\forall n\, g(n) < n$)

Speciální případy: $\oplus = + \longrightarrow$ prefixové součty $O(n)/O(1)$
$\oplus = \min \longrightarrow$ RMQ $O(n)/O(1)$
dynamické $\rightarrow$ intervalové stromy $O(\log n)/O(\log n)$
$O(n)$ init

Union-Find Problem [pův. Tarjan & van Leeuwen 1984, hezčí analýza od Seidela 200x]

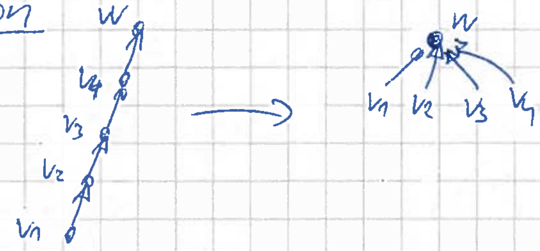
- udržujeme ekvivalenci na $\{1 \ldots n\}$
  - začínáme se samými 1prvkovými třídami
  - Union(x,y) sloučí třídy obsahující x, y
  - Find(x) zjistí třídu obsahující x (vrátí reprezentanta)
- alternativně: udržujeme komponenty souvislosti grafu, Union přidává hranu

Reprezentace: $\forall$ třídu reprezentujeme stromem orientovaným do kořene
(kořen = reprezentant třídy)
... vrchol si pamatuje svého otce.

Optimalizace: ① Union by rank ... kořeny si pamatují rank $r(v)$
Pokud $r(u) < r(v)$, pověsíme u pod v,
jinak libovolně, ale novému kořeni zvýšíme rank o 1

Důsledky:
- strom ranku r obsahuje aspoň 2^r vrcholů
- všechny ranky jsou $\leq \log n$
- stromy mají hloubku $\leq \log n$
- Union i Find trvají $O(\log n)$

② Path Compression



kdykoli nějakou cestu projdeme, zkomprimujeme si do ~~h~~ hvězdy

Postupně ukážeme, že Path Compression zaručuje sama o sobě čas $O(\log n)$ amort.
a ① + ② společně budou daleko lepší.

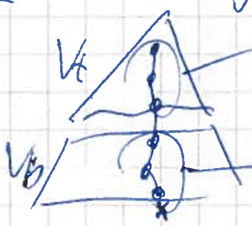
Ceny operací měříme počtem přepojení pointerů cost(op): (nepočítáme první přiřazení)
- Find trvá $O(1 + \text{délka cesty}) = O(1 + \text{cost})$
Union trvá $O(1) + 2\times$ Find, tedy také $O(1+\text{cost})$.

Trik: Nejprve provedeme všechna spojení stromů, (zde se pointery nepřepojují (pouze definují))
teprve pak všechny komprese cest (ale vždy se zastavíme ve vrcholu, který původně byl kořenem) (vše podstatné se děje zde)

Df: Rozklad ~~stromu~~ lesa na množině vrcholů V je (V_t, V_b) taková, že:

1. $V_t \cup V_b = V$, $V_t \cap V_b = \emptyset$ (rozklad v množinovém smyslu)
2. V_t je "uzavřená nahoru" – tedy otec vrcholu z V_t leží zase ve V_t.

Nápad: Uvážíme nějaký rozklad a sledujeme, jak ho protínají jednotlivé komprese:



komprese uvnitř V_t ⟶ normální komprese $\mathrm{comp}(x,y)$
→ cost ≈ délka cesty

vrcholy přijdou uvnitř V_b o otce (cesta se rozpadne) ⟶ speciální komprese $\mathrm{comp}(x,\infty)$
→ cost $= 0$ ... musíme účtovat jinak

Notace:

$\mathcal{F}$ = les na množině vrcholů X
C = posloupnost kompresí
$\|C\|$ = #normálních kompresí v C
$\mathrm{cost}(C)$ = celková cena kompresí v C

Obecně nás zajímá, kolik nejvýš může být $\mathrm{cost}(C)$ vzhledem k $|X|$ a $\|C\|$.

Lemma: Nechť C je posloupnost kompresí v lese $\mathcal{F}$ na množině X a (X_t, X_b) je rozklad lesa $\mathcal{F}$ indukující lesy $\mathcal{F}_t$ a $\mathcal{F}_b$.

Potom $\exists\, C_t, C_b$ posloupnosti kompresí pro $\mathcal{F}_t$ a $\mathcal{F}_b$ takové, že:

$$\|C_t\| + \|C_b\| \le \|C\| \quad (*)$$

$$\& \quad \mathrm{cost}(C) \le \mathrm{cost}(C_t) + \mathrm{cost}(C_b) + |X_b| + \|C_t\|. \quad (\#)$$

$-\#\mathrm{roots}(\mathcal{F}_b)$ [silnější lemma, která se bude hodit později]

Dk: C_t, C_b získáme přímočaře:

1. komprese leží celá uvnitř $\mathcal{F}_t$ → jde do C_t
2. analogicky $\mathcal{F}_b \to C_b$
3. jde napříč ⟶ speciální komprese uvnitř $\mathcal{F}_b$, normální uvnitř $\mathcal{F}_t$

dokrovnávky přispěje k $\|.\|$ 1x

z toho → $(*)$

Nyní dokážeme $(\#)$:

$\mathrm{cost}(C)$:

T ~~mění~~ změní otce na T – – – – – – platíme z $\mathrm{cost}(C_t)$

B změní otce na B – – – – – – platíme z $\mathrm{cost}(C_b)$

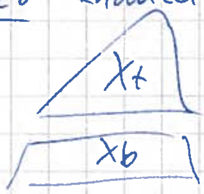
B změní otce na T → poprvé – – platíme z $|X_b|$ $- \#\mathrm{roots}(\mathcal{F}_b)$ pro silnější verzi

→ znovu – – platíme z $\|C_t\|$ (v každé T-kompresi to nastane max. 1x)

Df: $f(m,n) :=$ max. cost libovolné posloupnosti kompresí C t.ž. $\|C\| = m$ na stromu s n vrcholy.

Věta: $f(m,n) \le (m+n)\log n$.

<u>Dk:</u> Indukcí ... rozdělíme X na X_t, X_b velikosti $n/2$



$\|C\| = m$

z lemmatu: $\exists C_t, C_b \quad \|C_t\| + \|C_b\| \le \|C\|$

$m_t + m_b \le m$

& $cost(C) \le cost(C_t) + cost(C_b) + |X_b| + \|C_t\|$

z indukce: $cost(C) \le (m_t + n/2) \log n/2 + (m_b + n/2) \log n/2 + n/2 + m_t$

$\le m(\log n/2 + 1) + n(\log n/2 + 1) = (m+n) \log n.$

<u>Důsledek:</u> Union i Find provedený m-krát na n-prvkové množině trvá celkem $O((m+n)\log n)$.

Nyní přidáme <u>Union by rank</u>

<u>Df:</u> <u>Rankový les</u> je les s funkcí $r: V \to \mathbb{N}$ t.ž.

1. $r(v)$ = výška podstromu s kořenem v (měřená v hranách)
2. $\forall v \ \forall i = 0, \dots, r(v)-1 \ \exists w$ syn vrcholu v t.ž. $r(w) = i$.

Union by rank bez komprese cest produkuje rankové lesy ... a kompresi provádíme až dodatečně, takže nepřekáží.

Vrchol ranku r má alespoň r synů, jeho podstrom obsahuje alespoň 2^r vrcholů.

<u>Lemma:</u> Nechť $\mathcal{F}$ je rankový les s kořenem ranku r, s číslo $(0 \le s < r)$.

Pak množiny $X_t := \{x \in X \mid r(x) > s\}$ a indukované lesy $\mathcal{F}_t$
a $X_b := \{x \in X \mid r(x) \le s\}$ $\mathcal{F}_b$

splňují:

1. (X_t, X_b) je rozklad lesa $\mathcal{F}$. rankem lesa myslíme max. rank kořene
2. $\mathcal{F}_t$ je rankový les s rankem $\le s$
3. $\mathcal{F}_b$ je rankový les s rankem $\le r-s-1$

[(4) $|X_t| \le |X| / 2^{s}$] nebudeme potřebovat

Počítejme $f(m,n,r) :=$ max. cost posloupnosti m kompresí v lese ranku r s n vrcholy

$f(m,n,r) \le (r-1)n$ … přepojením vrcholu vzroste rank otce

$\le (r-1)m$ … cesta má max. $r+1$ vrcholů, takže přepojím max. $r-1$ z nich

Z rozkladu stromu dostaneme:

rank r:

- X_t: rank $> s$ } rank $r-s-1$ $\quad n_t := |X_t|$ $\quad C \to C_t$ $\quad m_t := \|C_t\|$
- X_b: rank $\le s$ } rank s $\quad n_b := |X_b|$ $\quad C \to C_b$ $\quad m_b := \|C_b\|$

Podle lemmatu o rozkladu: $n_t + n_b = n$, $m_t + m_b \le m$

& $\quad cost(C) \le cost(C_t) + cost(C_b) + |X_b| - \#roots(F_b) + \|C_t\|$

$$\le f(m_t, n_t, r-s-1) + f(m_b, n_b, s) + n - n_t - (s+1)n_t + m_t$$

$\forall v \in X_t$ má aspoň $s+1$ synů v X_b a jsou to navzájem různé kořeny stromů v F_b

Proto: $\boxed{f(m,n,r) \le f(m_t, n_t, r-s-1) + f(m_b, n_b, s) + n - (s+2)n_t + m_t}$

Zkusíme rekurzivní krok: Předpokládejme, že $f(\mu,\nu,\varrho) \le k\cdot\mu + \nu\cdot g(\varrho)$

Potom: $f(m,n,r) \le k\cdot m_t + \underbrace{n_t\cdot g(r-s-1)}_{\le n_t\cdot g(r)} + \underbrace{f(m_b,n_b,s)}_{\le f(m_b,n,s)} + n \underbrace{-(s+2)n_t}_{\le -s\cdot n_t} + m_t$

volbou $s := g(r)$: $\quad f(m,n,r) \le (k+1)m_t + f(m_b, n, g(r)) + n \quad \Big/ - (k+1)(\underbrace{m_b + m_t}_{\le m})$

$$\underbrace{f(m,n,r) - (k+1)m}_{\text{označíme } \varphi(m,n,r)} \le \underbrace{f(m_b, n, g(r)) - (k+1)m_b}_{\text{toto tedy je } \varphi(m_b,n,g(r))} + n$$

Tedy: $\quad \varphi(m,n,r) \le \varphi(m_b, n, g(r)) + n$

$\downarrow$

$\varphi(m,n,r) \le n\cdot g^*(r)$

$\downarrow$

$f(m,n,r) \le n\cdot g^*(r) + (k+1)m$

$\boxed{\text{Posouvací lemma: Pokud } f(m,n,r) \le km + n\cdot g(r), \text{ pak také } f(m,n,r) \le (k+1)m + n\cdot g^*(r)}$

Důsledek: $\quad f(m,n,r) \le (k+i)m + n\cdot g^{\overbrace{*\cdots*}^{i}}(r)$

Kde ale začít? Z triv. odhadu máme $f(m,n,r) \le (r-1)n$

... tedy $k=0$, $g(r)=r-1$ ... jenže $g^*(r)$ je také $r-1$ ↯

První krok tedy uděláme trochu jinak. Vyjdeme z ⊛8 (dosadíme triv. mez)

$$f(m,n,r) \le n_t \cdot (r-s-2) + f(m_b, n_b, s) + n - (s+2)n_t + m_t$$

$$\le n_t \cdot (r-2s-4) + f(m_b, n_b, s) + n + m_t$$

$s := \lfloor r/2 \rfloor$

$$\le f(m_b, n_b, r/2) + n + m_t$$

Značí: $f(m,n,r) - m \le f(m_b, n_b, r/2) - m_b + n$

Tedy: $\boxed{f(m,n,r) \le m + n \cdot \log r}$ ← to již můžeme iterovat

Iterováním: $f(m,n,r) \le (i+1)m + n \cdot \log^{\overbrace{*\cdots*}^{i}} r$

<u>Volba i</u>: ① $\alpha(r) := \min\{ i \mid \log^{\overbrace{*\cdots*}^{i}}(r) \le i \}$

$$\Rightarrow f(m,n) \le (1 + \alpha(\log n))(m+n)$$

② $\alpha(m,n,r) := \min\{ i \mid \log^{*\cdots*}(r) \le m/n \}$

$$\Rightarrow f(m,n) \le (2 + \alpha(m,n,\log n))\, m$$