# Komplexní čísla: Složkový tvar

**Definice:** $\mathbb{C} = \{a + b\,\mathbf{i} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

**Sčítání:** $(a + b\,\mathbf{i}) \pm (p + q\,\mathbf{i}) = (a \pm p) + (b \pm q)\,\mathbf{i}$.

**Násobení:** $(a + b\,\mathbf{i}) \cdot (p + q\,\mathbf{i}) = ap + (aq + bp)\,\mathbf{i} + bq\,\mathbf{i}^2 =$
$= (ap - bq) + (aq + bp)\,\mathbf{i}$.

Pro $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha(a + b\,\mathbf{i}) = \alpha a + \alpha b\,\mathbf{i}$.

**Komplexní sdružení:** $\overline{a + b\,\mathbf{i}} = a - b\,\mathbf{i}$.

Vlastnosti: $\overline{\overline{x}} = x$, $\overline{x \pm y} = \overline{x} \pm \overline{y}$, $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$, $x \cdot \overline{x} \in \mathbb{R}$.

**Absolutní hodnota:** $|x| = \sqrt{x \cdot \overline{x}}$, takže $|a + b\,\mathbf{i}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ : $|\alpha x| = |\alpha| \cdot |x|$.

**Dělení:** $x/y = (x \cdot \overline{y})/(y \cdot \overline{y})$.

# Komplexní čísla: Gaußova rovina a goniometrický tvar

**Geometrický pohled na $\mathbb{C}$:**

- Číslům přiřadíme body v $\mathbb{R}^2$: $a + b\,\mathbf{i} \leftrightarrow (a, b)$.
- $|x|$ je vzdálenost od bodu $(0, 0)$.
- $|x| = 1$ pro čísla ležící na jednotkové kružnici (*komplexní jednotky*).

**Goniometrický tvar:**

- Pro komplexní jednotky: $x = \cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi$ pro nějaké $\varphi \in [0, 2\pi)$.
- Obecně: $x = |x| \cdot (\cos\varphi(x) + \mathbf{i}\sin\varphi(x))$.

Číslu $\varphi(x) \in [0, 2\pi)$ říkáme *argument* čísla $x$ (značí se $\arg x$).

Navíc $\varphi(\overline{x}) = -\varphi(x)$.

# Komplexní čísla: Exponenciální tvar

**Eulerova formule:** $\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi$.

Každé $x \in \mathbb{C}$ lze tedy zapsat jako $|x| \cdot \mathrm{e}^{\mathbf{i}\cdot\varphi(x)}$.

**Násobení:**
$xy = \left(|x| \cdot \mathrm{e}^{\mathbf{i}\cdot\varphi(x)}\right) \cdot \left(|y| \cdot \mathrm{e}^{\mathbf{i}\cdot\varphi(y)}\right) = |x| \cdot |y| \cdot \mathrm{e}^{\mathbf{i}\cdot(\varphi(x)+\varphi(y))}$.
*(absolutní hodnoty se násobí, argumenty sčítají)*

**Umocňování:** $x^\alpha = \left(|x| \cdot \mathrm{e}^{\mathbf{i}\cdot\varphi(x)}\right)^\alpha = |x|^\alpha \cdot \mathrm{e}^{\mathbf{i}\alpha\varphi(x)}$.

**Odmocňování:** $\sqrt[n]{x} = |x|^{1/n} \cdot \mathrm{e}^{\mathbf{i}\cdot\varphi(x)/n}$.

Odmocnina není jednoznačná: $1^4 = (-1)^4 = \mathbf{i}^4 = (-\mathbf{i})^4 = 1$.

# Komplexní čísla: Odmocniny z jedničky

Je-li nějaké $x \in \mathbb{C}$ $n$-tou odmocninou z jedničky, musí platit:

- $|x| = 1$, takže $x = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\varphi}$ pro nějaké $\varphi$,
- $\mathrm{e}^{\mathbf{i}\varphi n} = \cos \varphi n + \mathbf{i} \sin \varphi n = 1$,
  což nastane, kdykoliv $\varphi n = 2k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$.
- Dostáváme $n$ různých $n$-tých odmocnin:
  $2k\pi/n$ pro $k = 0, \ldots, n-1$.

Obecné odmocňování: $\sqrt[n]{x} = |x|^{1/n} \cdot \mathrm{e}^{\mathbf{i}\varphi(x)/n} \cdot \sqrt[n]{1}$.