

Domácí úkoly z Diskrétní matematiky 2010-11-24

Střední hodnoty

Na stejném cyklu – scyk (8 bodů)

Jaká je pravděpodobnost, že v náhodné permutaci na $\{1, \dots, n\}$ leží 1 a 2 na společném cyklu?

Počet sérií – serie (10 bodů)

Mějme náhodnou posloupnost z $\{0, 1\}^n$. Sérií nazveme maximální souvislý úsek stejných hodnot – tedy například posloupnost 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0 obsahuje 4 série. Jaká je střední hodnota počtu sérií?

Dvě kostky – 2kos (6 bodů)

Hodíme dvěma kostkami a výsledek přečteme jako dvojciferné číslo. Jaká je střední hodnota tohoto čísla?

Dvě kostky s falší – 2kosf (10 bodů)

V předchozí úloze se falešný hráč pokusí švindlovat tak, že kostku s větší hodnotou použije jako první číslici. Jak se změní střední hodnota?

Zátěž serveru – serv (12 bodů)

Mějme server, kterému chodí požadavky od uživatelů. A jelikož uživatelů je mnoho, řídí se počet požadavků za sekundu Poissonovým rozdělením se střední hodnotou $\lambda = 100$. Odhadněte shora pravděpodobnost, že za sekundu přijde více než 1 000 požadavků (a server přetížen spadne):

- a) pomocí Markovovy nerovnosti
- b) pomocí Čebyševovy nerovnosti

(+5 bodů) Zkuste dokázat, že v tomto případě získáme z nerovností jen opravdu hrubý odhad: spočítejte pravděpodobnost přímo podle definice Poissonova rozdělení. Může se hodit napsat si na to program nebo použít Mathematicu. Další možnost je podívat se, jak v analýze fungují Taylorovy řady a použít větu o Lagrangeově tvaru zbytku; ta také dá dobrý horní odhad.

Házená – ppvv (16 bodů)

Mějme spravedlivou minci a házejme tak dlouho, dokud nám za sebou nepadne posloupnost panna, panna, vorel (PPV), nebo posloupnost panna, vorel, vorel (PVV). Jaká je pravděpodobnost, že:

- a) skončíme po padnutí PPV;
- b) skončíme po padnutí PVV;
- c) neskončíme nikdy?

Netransitivní kostky – ntrk (14 bodů)

Mějme 6-stěnné kostky, na jejichž stěnách jsou napsána nějaká přirozená čísla (obecně na každé kostce jiná). Řekneme, že kostka A poráží kostku B ($A \succ B$), pokud při hodu oběma padne s pravděpodobností větší než $1/2$ na A větší číslo než na B . Vymyslete trojici kostek X , Y a Z takovou, že $X \succ Y$, $Y \succ Z$ a $Z \succ X$.