

Domácí úkoly z Diskrétní matematiky 2010-11-03

Kombinatorické počítání

Pomsta šíleného sysadmina – hesla (12 bodů)

Kolik hesel můžeme vytvořit z velkých a malých písmen anglické abecedy a číslic, víme-li, že heslo smí mít 5 až 64 znaků a musí obsahovat od každého ze tří druhů znaků alespoň jeden?

Skoro disjunkttní podmnožiny – sdp (8 bodů)

Kolik existuje dvojic (A, B) množin $A, B \subseteq \{1, \dots, n\}$ takových, že $|A \cap B| = 1$?

Ještě jednou loupežníci – loup (6 bodů)

Dokažte, že platí:

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \dots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

6 bodů za důkaz indukci, 4 navíc, pokud vymyslíte nějaký hezký způsob, jak pravou stranu odvodit z levé.

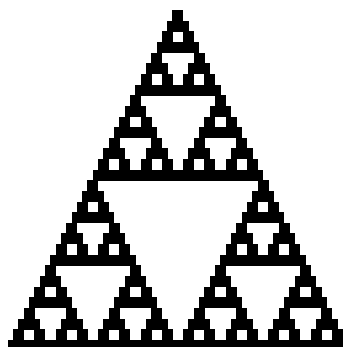
Tajuplná krabice – tajkr (12 bodů)

V tajuplné krabici na půdě jsme objevili n pradědečkových hraček. Kolika způsoby si můžeme vybrat k z nich, pokud: (ne)záleží na pořadí hraček a hračky (ne)vracíme hned zpátky do krabice? Spočítejte, jak dopadnou všechny 4 možnosti.

V řešení se prosím neodkazujte na pojmy typu „kombinace s opakováním,“ které jsme na přednášce nedefinovali.

Sierpiňského koberec – sierp (16 bodů)

Pokud si nakreslíme Pascalův trojúhelník a vybarvíme liché hodnoty, získáme v prvních 16 řádcích následující obrázek (je to fraktál, kterému se říká Sierpiňského koberec):



Dokažte, že tato pravidelná struktura (trojúhelníky složené z menších trojúhelníků) bude pokračovat i ve zbytku Pascalova trojúhelníku. (Taky můžete prozkoumat, jaké obrázky by místo $\binom{n}{k} \bmod 2$ kreslilo $\binom{n}{k} \bmod \ell$ pro různá ℓ .)

Pascalova diagonála – pdiag (14 bodů)

Co vznikne, pokud sečteme „diagonály“ Pascalova trojúhelníku, tedy

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{n-k} \quad \text{a} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n+k+1}{n-k}?$$