Domácí úkoly z Diskrétní matematiky 2011-01-05

Rovinné grafy 2

5-regulární rovinné grafy – `5rr` *(9 bodů)*

Popište konstrukci nekonečně mnoha souvislých 5-regulárních rovinných grafů.

Skoro 6-regulární rovinné grafy – `sko6r` *(10 bodů)*

Víme, že 6-regulární rovinný graf nemůže existovat. Budeme tedy místo toho hledat grafy, které jsou *skoro 6-regulární.* Konkrétněji: Najděte posloupnost rovinných grafů $G_1, G_2, \ldots$, pro kterou bude platit:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{v \in V(G_n) \mid \deg(v) < 6\}|}{|V(G_n)|} = 0.$$

Mosty v bipartitních regulárních grafech – `moreb` *(11 bodů)*

Dokažte, že k-regulární bipartitní graf pro $k > 1$ nemůže obsahovat most. (Z jiných úkolů už víme, že pro sudé k nemůže existovat nezávisle na bipartitnosti, a že pro $k = 3$ existuje nebipartitní graf s mostem.)

Doplňky rovinných grafů – `doro` *(10 bodů)*

Na cvičení jsme dokázali, že pro $n \geq 11$ nemůže existovat rovinný graf na n vrcholech, jehož doplněk by byl také rovinný. Na druhou stranu pro $n = 5$ takový graf určitě existuje $C_5 \approx \overline{C_5}$. Zkuste něco zjistit o grafech mezi tím (pro $n = 6, \ldots, 10$). Čím blíže se k hranici mezi „dobrými“ a „špatnými“ n přiblížíte, tím více bodů.

Maximální počet stěn – `psten` *(8 bodů)*

Víme, že v rovinných grafech platí $e \leq 3v - 6$. Dokažte obdobný horní odhad pro f. (Zde v je počet vrcholů, e počet hran a f počet stěn.)

2-obarvení stěn – `2sten` *(10 bodů)*

Mějme rovinný graf, jehož všechny vrcholy mají sudé stupně a každá stěna je ohraničena kružnicí. Dokažte, že existuje obarvení jeho stěn dvěma barvami takové, že žádné dvě stěny sousedící hranou nedostanou stejnou barvu.