Písemka z Diskrétní matematiky 5. 1. 2010

1. Pro která n existuje bipartitní graf na n vrcholech, jehož doplněk je opět bipartitní? *(3 body)*

2. Kolik existuje grafů na množině vrcholů $\{1, 2, 3, 4\}$?

   a) všech *(1 bod)*

   b) navzájem neisomorfních *(3 body)*

3. Uvažme množinu $\{1, 2, \ldots, 12\}$ uspořádanou relací dělitelnosti.

   a) Nakreslete Hasseho diagram. *(1 bod)*

   b) Nalezněte všechny nejmenší, největší, minimální a maximální prvky. *(1 bod)*

   c) Jaký má toto uspořádání nejdelší řetězec a antiřetězec? *(2 body)*

   d) Dokažte, že toto uspořádání lze vnořit do potence nějaké množiny $\{1, \ldots, n\}$ s uspořádáním inkluzí. *(2 body)*

   e) (*) Nalezněte vnoření z předchozí úlohy pro $n < 11$. *($(12 - n)/3$ bodů)*

   f) (*) Dokažte, že pro menší n takové vnoření neexistuje. *(1 bod)*

4. Dokažte, že množina všech *neklesajících* funkcí z množiny $\{1, 2\}$ do přirozených čísel je spočetná. *(3 body)*

5. (*) Dokažte, že množiny $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ jsou stejně mohutné. *(2 body)*

Potřebujete získat 8 bodů. Vše, co tvrdíte, podrobně zdůvodněte. Můžete bez důkazu používat tvrzení z přednášky nebo ze cvičení, ale uveďte jejich přesné znění. Nepoužívejte kalkulačky, zápisky, učebnice, sousedy ani jiné pomůcky. Nula je přirozené číslo. V případě nejasností se ptejte cvičícího.