3. Goldbergův algoritmus *(zapsala Markéta Popelová)*

Představíme si nový algoritmus pro hledání maximálního toku v síti, který se ukáže být stejně dobrý jako *Dinicův algoritmus* ($\mathcal{O}(MN^2)$) a po několika vylepšeních bude i lepší. Nejdříve si připomeňme definice, které budeme potřebovat:

Definice: Mějme síť $S = (V, E, z, s, c)$, tok f a libovolný vrchol v. Pak $f^\Delta(v)$ nazýváme *přebytek* ve vrcholu v a definujeme ho takto:

$$f^\Delta(v) := \sum_{uv \in E} f(uv) - \sum_{vu \in E} f(vu).$$

Přebytek ve vrcholu v je tedy součet všeho, co do vrcholu v přiteče, minus součet všeho, co z v odteče.

Definice: Dále pro libovolnou hranu $uv \in E$ definujeme její *rezervu* následovně:

$$r(uv) = c(uv) - f(uv) + f(vu).$$

Rezerva hrany značí, co ještě je možno po této hraně poslat.

Poznámka: Dále budeme označovat písmenem N počet vrcholů a M počet hran, tedy $N = |V|$ a $M = |E|$.

Goldbergův algoritmus na rozdíl od Dinicova algoritmu začíná s ohodnocením hran, které pravděpodobně není tokem (budeme ho nazývat *vlna*), a postupně ho zmenšuje až na korektní tok.

Definice: Funkce $f : E \to \mathbb{R}_0^+$ je *vlna* v síti (V, E, z, s, c) tehdy, když jsou splněny následující dvě podmínky:

1. $\forall e \in E : f(e) \leq c(e)$ (vlna na hraně nepřekročí kapacitu hrany)
2. $\forall v \in V \setminus \{z, s\} : f^\Delta(v) \geq 0$ (přebytek ve vrcholu je nezáporný).

Pozorování: Každý tok f je také vlna, ale opačně to obvykle platit nemusí.

Operace: *Převedení přebytku*

Algoritmus bude potřebovat převádět přebytky z vrcholu u na sousední vrchol v. Mějme hranu uv s kladnou rezervou $r(uv) > 0$ a kladným přebytkem ve vrcholu u: $f^\Delta(u) > 0$. Část přebytku budeme chtít poslat z vrcholu u do vrcholu v. Vezmeme $\delta := \min(f^\Delta(u), r(uv))$ a po hraně uv pošleme tok o velikosti δ. Výsledná situace bude vypadat následovně:

- $f'^\Delta(u) = f^\Delta(u) - \delta$.
- $f'^\Delta(v) = f^\Delta(v) + \delta$.
- $r'(uv) = r(uv) - \delta$.
- $r'(vu) = r(vu) + \delta$.

Kdybychom ovšem nepřidali žádnou jinou podmínku, náš algoritmus by se mohl krásně zacyklit (např. posílat přebytek z u do v a zase zpátky). Abychom se tomu vyhnuli, zavedeme *výšku vrcholu* $h : V \to \mathbb{N}$ a dovolíme převádět přebytek pouze z vyššího vrcholu u na nižší v: $h(u) > h(v)$.

Shrnutí: Podmínky pro převedení přebytku po hraně $uv \in E$:

1. Ve vrcholu u je nenulový přebytek: $f^\Delta(u) > 0$.
2. Vrchol u je výš než vrchol v: $h(u) > h(v)$.
3. Hrana uv má nenulovou rezervu: $r(uv) > 0$.

Operace: Pro vrchol $u \in V$ definujme *zvednutí vrcholu*: Pokud během výpočtu narazíme ve vrcholu u na přebytek, který nelze nikam převést, zvětšíme výšku vrcholu u o jedničku, tj. $h(u) \leftarrow h(u) + 1$.

Algoritmus (Goldbergův)

1. $\forall v \in V : h(v) \leftarrow 0$ (všem vrcholům nastavíme počáteční výšku nula) a $h(z) \leftarrow N$ (zdroj zvedneme do výšky N).
2. $\forall e \in E : f(e) \leftarrow 0$ (po hranách nejdříve nenecháme protékat nic) a $\forall zu \in E : f(zu) \leftarrow c(zu)$ (ze zdroje pustíme maximální možnou vlnu).
3. Dokud $\exists u \in V \setminus \{z, s\} : f^\Delta(u) > 0$:
4. Pokud $\exists v \in V : uv \in E,\ r(uv) > 0$ a $h(u) > h(v)$, pak převedeme přebytek po hraně z u do v.
5. V opačném případě zvedneme u: $h(u) \leftarrow h(u) + 1$.
6. Vrátíme tok f jako výsledek.

Nyní bude následovat několik lemmat a invariantů, jimiž dokážeme správnost a časovou složitost Goldbergova algoritmu.

Invariant A (základní):

1. Funkce f je v každém kroku algoritmu vlna.
2. $h(v)$ nikdy neklesá pro žádné v.
3. $h(z) = N$ a $h(s) = 0$ po celou dobu běhu algoritmu.

Důkaz: Indukcí dle počtu průchodů cyklem (3. – 5. krok algoritmu).

Na začátku je vše v pořádku (f je nulová funkce, přebytky všech vrcholů jsou nezáporné, tedy f je vlna, $h(z) = N$ a $h(s) = 0$). V průběhu se tyto hodnoty mění pouze při:

- Převedení po hraně uv: Po hraně uv se nepošle více než její rezerva. Přebytek u se sníží, ale nejméně na nulu. Přebytek v se zvýší. Tedy f zůstává vlnou. Výšky se nemění.
- Zvednutí vrcholu u: Mění pouze výšky – a to vrcholů různých od zdroje či stoku – a pouze se zvyšují. ♡

Invariant S (o Spádu): Neexistuje hrana $uv \in E : r(uv) > 0 \;\&\; h(u) > h(v) + 1$ (s kladnou rezervou a spádem větším než jedna).

Důkaz: Indukcí dle běhu algoritmu.

Na začátku mají všechny hrany ze zdroje rezervu nulovou a všechny ostatní vedou mezi vrcholy s výškou 0. V průběhu by se tento invariant mohl pokazit pouze dvěma způsoby:

- Zvednutím vrcholu u, ze kterého vede hrana uv s kladnou rezervou a spádem 1. Tento případ nemůže nastat, neboť hranu zvedáme pouze tehdy, když neexistuje vrchol v takový, že hrana uv má kladnou rezervu a spád alespoň 1. Takový vrchol v našem případě existuje, proto se místo zvednutí vrcholu u pošle přebytek po hraně uv.
- Zvětšením rezervy hrany se spádem větším než 1. Toto také nemůže nastat, neboť rezervu bychom mohli zvětšit jedině tak, že bychom poslali něco v protisměru – a to nesmíme, jelikož bychom poslali přebytek z nižšího vrcholu na vyšší. ♡

Definice: Cestu P nazveme *nenasycenou*, pokud všechny její hrany mají kladnou rezervu. Neboli $\forall e \in P : r(e) > 0$.

Lemma K (o Korektnosti): Když se algoritmus zastaví, je f maximální tok.

Důkaz: Důkaz rozložme do dvou kroků. Nejdříve ukážeme, že f je tok, a pak jeho maximalitu.

1. Nechť se algoritmus zastavil. Pak nemohl existovat žádný vrchol v (kromě zdroje a stoku) s kladným přebytkem. Tedy $\forall v \in V \ \setminus \{z, s\} : f^\Delta(v) = 0$. (Víme již, že f je po celou dobu vlna, takže přebytek nemůže být nikdy záporný.) V tom případě splňuje f podmínky toku.
2. Pro spor předpokládejme, že tok f není maximální. Pak existuje nenasycená cesta ze zdroje do stoku. Vezměme si libovolnou takovou cestu. Zdroj je stále ve výšce N a spotřebič ve výšce 0 (viz invariant A). Tato cesta tedy překonává výšku N, ale může mít nejvýše $N - 1$ hran. Proto existuje alespoň jedna hrana se spádem alespoň 2. Tato hrana tedy nemůže mít kladnou rezervu (viz invariant S). Tato cesta proto nemůže být zlepšující, což je spor. Tím jsme dokázali, že f je nutně maximální tok. ♡

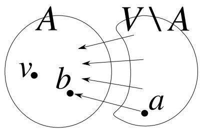
Lemma C (Cesta): Mějme vrchol $v \in V$. Pokud $f^\Delta(v) > 0$, pak existuje nenasycená cesta z vrcholu v do zdroje.

Důkaz: Pro vrchol $v \in V$ s $f^\Delta(v) > 0$ definujme množinu $A := \{u \in V : \exists$ nenasycená cesta z v do $u\}$.

Sečtěme přebytky ve všech vrcholech množiny A. Přebytek každého vrcholu se spočítá jako součet toků do něj vstupujících minus součet toků z něj vystupujících. Všechny hrany, jejichž oba vrcholy leží v A, se jednou přičtou a jednou odečtou. Proto nás budou zajímat pouze hrany mezi A a $V \setminus A$.

$$\sum_{u\in A} f^\Delta(u) = \underbrace{\sum_{ab\in E\cap((V\setminus A)\times A)} f(ab)}_{=0} - \underbrace{\sum_{ab\in E\cap(A\times(V\setminus A))} f(ab)}_{\geq 0} \ \leq \ 0.$$

Ukažme si, proč je první svorka rovna nule. Mějme vrcholy $a \in V \setminus A$ a $b \in A$ takové, že $ab \in E$. O nich víme, že $r(ba) = 0$ (jinak by a patřilo do A) $\Rightarrow f(ba) = c(ba) \Rightarrow f(ab) = 0$. Proto do A nic nepřitéká.



Obrázek k důkazu lemmatu C

Proč je druhá svorka nezáporná, je zřejmé, neboť tok na hraně je vždy nezáporný a součet nezáporných čísel je nezáporné číslo.

Proto $\sum_{u \in A} f^{\Delta}(u) \leq 0$. Zároveň však v A je aspoň jeden vrchol s kladným přebytkem, totiž v, proto v A musí být také vrchol se záporným přebytkem – a jediný takový je zdroj. Tím je dokázáno, že $z \in A$, tedy že vede nenasycená cesta z vrcholu v do zdroje. ♡

Invariant V (Výška): $\forall v \in V$ platí $h(v) \leq 2N$.

Důkaz: Kdyby existoval vrchol v s výškou $h(v) > 2N$, tak by musel být někdy zvednut z výšky $2N$. Tehdy musel mít kladný přebytek $f^{\Delta}(v) > 0$ (jinak by nemohl být zvednut). Dle lemmatu C musela existovat nenasycená cesta z v do zdroje. Tato cesta měla spád alespoň N, ale mohla mít nejvýše $N - 1$ hran (jinak by to nebyla cesta v síti na N vrcholech). Tudíž musela na této cestě existovat hrana se spádem alespoň 2, což je spor s invariantem S (neboť všechny hrany této cesty mají z definice nenasycené cesty kladné rezervy). ♡

Lemma Z (počet Zvednutí): Počet všech zvednutí je maximálně $2N^2$.

Důkaz: Stačí si uvědomit, že každý vrchol můžeme zvednout maximálně $2N$-krát a vrcholů je N. ♡

Teď nám ještě zbývá určit počet provedených převedení. Bude se nám hodit, když převedení rozdělíme na dva druhy:

Definice: Řekneme, že převedení je *nasycené*, pokud po převodu rezerva na hraně uv klesla na nulu, tedy $r(uv) = 0$. V opačném případě je *nenasycené*, a tehdy určitě klesne přebytek ve vrcholu u na nulu, tedy $f^{\Delta}(u) = 0$ (při nasyceném převedení se to ale může stát také).

Lemma S (naSycená převedení): Počet všech nasycených převedení je nejvýš NM.

Důkaz: Pro každou hranu uv spočítejme počet nasycených převedení (tedy takových převedení, že po nich klesne rezerva hrany na nulu). Abychom dvakrát nasyceně převedli přebytek (nebo jeho část) z vrcholu u do vrcholu v, tak jsme museli u mezitím alespoň dvakrát zvednout:

Po prvním nasyceném převedení z vrcholu u do vrcholu v se vynulovala rezerva hrany uv. Uvědomme si, že při této operaci muselo být u výše než v, a dokonce víme, že bylo výše přesně o 1 (viz lemma S). Po této hraně tedy nemůžeme už nic více převést. Aby došlo k druhému nasycenému převedení z u do v, musíme nejprve opět zvýšit rezervu hrany uv. Jediný způsob, jak toho lze dosáhnout, je převést část přebytku z v zpátky do u. K tomu se musí v dostat (alespoň o 1) výše než u. Po přelití bude rezerva uv opět kladná. A abychom provedli nasycené převedení znovu ve směru z u do v, musíme zase u dostat (alespoň o 1) výše než v. Proto musíme u alespoň o 2 zvednout – nejprve na úroveň v a pak ještě o 1 výše.

Ukázali jsme si tedy, že mezi každými dvěma nasycenými převedeními jsme vrchol u zvedli alespoň dvakrát. Nicméně libovolnou hranu můžeme zvednout nejvýše $2N$-krát (viz invariant V). Všech hran je M, tudíž počet všech nasycených převedení je nejvýše NM. ♡

Lemma N (Nenasycená převedení): Počet všech nenasycených převedení je $\mathcal{O}(N^2M)$.

Důkaz: Důkaz provedeme pomocí potenciálové metody – nadefinujme si následující funkci jako potenciál:

$$\Phi := \sum_{\substack{v: f^\Delta(v)>0 \\ v\neq z,s}} h(v).$$

Nyní se podívejme, jak se náš potenciál během algoritmu vyvíjí a jaké má vlastnosti:

- Na počátku je $\Phi = 0$.
- Během celého algoritmu je $\Phi \geq 0$, neboť je součtem nezáporných členů.
- Zvednutí vrcholu zvýší Φ o jedničku (Aby byl vrchol zvednut, musel mít kladný přebytek ⇒ vrchol do sumy již přispíval, teď jen přispěje číslem o 1 vyšším.). Již víme, že za celý průběh algoritmu je všech zvednutí maximálně $2N^2$, proto zvedáním vrcholů zvýšíme potenciál dohromady nejvýše o $2N^2$.
- Nasycené převedení zvýší Φ nejvýše o $2N$, protože buď po převodu hranou uv v u zůstal nějaký přebytek, takže se mohl potenciál zvýšit nejvýše o $h(v) \leq 2N$, nebo je přebytek v u po převodu nulový a potenciál se dokonce o jedna snížil. Za celý průběh tak dojde k maximálně NM takovýmto převedením, díky nimž se potenciál zvýší maximálně o $2N^2M$.
- Konečně když převádíme po hraně uv nenasyceně, tak od potenciálu určitě odečteme výšku vrcholu u (neboť se vynuluje přebytek ve vrcholu u) a možná přičteme výšku vrcholu v. Jenže $h(v) = h(u) - 1$, a proto nenasycené převedení potenciál vždy sníží alespoň o jedna.

Z tohoto rozboru chování potenciálu Φ v průběhu algoritmu získáváme, že počet všech nenasycených převedení může být nejvýše $2N^2 + 2N^2M$, což je $\mathcal{O}(N^2M)$. ♡

Implementace:

Budeme si pamatovat seznam P všech vrcholů $v \neq z, s$ s kladným přebytkem. Neboli

$$P = \{v \in V \setminus \{z, s\} \mid f^\Delta(v) > 0\}.$$

Když měníme přebytek nějakého vrcholu, můžeme náš seznam v konstantním čase aktualizovat (např. tak, že si každý vrchol pamatuje pozici, na které v seznamu P je). V konstantním čase také umíme odpovědět, zda existuje nějaký vrchol s přebytkem.

Dále si pro každý vrchol $u \in V$ budeme pamatovat $L(u)$-seznam hran $uv \in E$ takových, které vedou dolů (mají spád alespoň 1) a kladnou rezervu. Neboli

$$L(u) = \{uv \in E \mid v \in V,\ r(uv) > 0,\ h(v) < h(u)\}.$$

Díky tomu můžeme přistupovat k patřičným sousedům u v čase $\mathcal{O}(1)$, stejně jako přidávat hrany do $L(u)$, resp. je mazat. Opět každá hrana si bude pamatovat pozici, na které se nachází v seznamu L.

Rozbor časové složitosti algoritmu:

1. Inicializace výšek … $\mathcal{O}(N)$.
2. Inicializace vlny f … $\mathcal{O}(M)$.
3. Výběr vrcholu u s kladným přebytkem – vezmeme první vrchol v P … $\mathcal{O}(1)$.
4. Výběr vrcholu v, do kterého vede z u hrana s kladnou rezervou a který je níže než u – vezmeme první hranu z $L(u)$ … $\mathcal{O}(1)$.
   Převedení přebytku: … $\mathcal{O}(1)$.
   - Nasycené převedení … $\mathcal{O}(1)$.
     - Rezerva hrany uv klesne na nulu $\Rightarrow$ hrana uv vypadne z $L(u)$ … $\mathcal{O}(1)$.
     - Přebytek vrcholu v se zvýší $\Rightarrow$ pokud ještě nebyl v seznamu P, tak se tam přidá … $\mathcal{O}(1)$.
     - Přebytek vrcholu u možná také klesne na nulu $\Rightarrow$ pak by vrchol u vypadnul z P … $\mathcal{O}(1)$.
   - Nenasycené převedení … $\mathcal{O}(1)$.
     - Rezerva hrany uv zůstane nezáporná $\Rightarrow$ hrana uv zůstane v $L(u)$ … $\mathcal{O}(1)$.
     - Vynuluje se přebytek vrcholu $u \Rightarrow$ vrchol u vypadne z P … $\mathcal{O}(1)$.
     - Přebytek vrcholu v se zvýší $\Rightarrow$ pokud ještě nebyl v seznamu P, tak se tam přidá … $\mathcal{O}(1)$.
5. Zvednutí vrcholu $u \ldots \mathcal{O}(N)$.
   Musíme obejít všechny hrany do u a z u, kterých je nejvýše $2N - 2$, porovnat výšky a případně tyto hrany uv odebrat ze seznamu $L(v)$ resp. přidat do $L(u)$. Abychom pro odebrání hrany uv ze seznamu $L(v)$ nemuseli procházet celý seznam, budeme si $\forall u \in V$ pamatovat ještě $L^{-1}(u) :=$ seznam ukazatelů na hrany uv v seznamech $L(v)$.

Vidíme, že každé zvednutí je sice drahé, ale je jich zase poměrně málo. Naopak převádění přebytků je častá operace, takže je výhodné, že trvá konstantní čas.

Shrnutí:

- Všech zvednutí je $\mathcal{O}(N^2)$ (viz lemma Z), každé trvá $\mathcal{O}(N)$ … $\mathcal{O}(N^3)$.
- Všech nasycených převedení je $\mathcal{O}(NM)$ (viz lemma S), každé trvá $\mathcal{O}(1)$ … $\mathcal{O}(NM)$.
- Všech nenasycených převedení je $\mathcal{O}(N^2M)$ (viz lemma N), každé trvá $\mathcal{O}(1)$ … $\mathcal{O}(N^2M)$.

Dohromady má tedy Goldbergův algoritmus časovou složitost $\mathcal{O}(N^2M)$. Vidíme, že už v tomto obecném případě to není horší než Dinicův algoritmus. Příště si ukážeme, že může mít i mnohem lepší. Nejdříve ale zformulujme všechna dokázaná tvrzení do následující věty:

Věta: Goldbergův algoritmus najde maximální tok v čase $\mathcal{O}(N^2M)$.

Pozorování: Pokud bychom volili vždy nejvyšší z vrcholů s přebytkem, tak by se mohl algoritmus chovat lépe. Podívejme se na to pozorněji a vylepšený Goldebrgův algoritmus označme G'.

Algoritmus (Vylepšený Goldbergův algoritmus)

1. $\forall v \in V : h(v) \leftarrow 0$ (všem vrcholům nastavíme počáteční výšku nula) a $h(z) \leftarrow N$ (zdroj zvedneme do výšky N).
2. $\forall e \in E : f(e) \leftarrow 0$ (po hranách nejdříve necháme protékat nic) a $\forall zu \in E : f(zu) \leftarrow c(zu)$ (ze zdroje pustíme maximální možnou vlnu).
3. Dokud $\exists u \in V \setminus \{z, s\} : f^{\Delta}(u) > 0$:
4. Vybereme z vrcholů s přebytkem ten s nejvyšší výškou, označíme ho u.
5. Pokud $\exists v \in V : uv \in E,\ r(uv) > 0$ a $h(u) > h(v)$, pak převedeme přebytek po hraně z u do v.
6. V opačném případě zvedneme u: $h(u) \leftarrow h(u) + 1$.
7. Vrátíme tok f jako výsledek.

Rozmysleme si, o kolik bude vylepšený algoritmus G' lepší než ten původní. Ten původní měl časovou složitost $\mathcal{O}(N^2M)$ a převládal člen, který odpovídal nenasyceným převedením. Zkusme tedy právě počet nenasycených převedení odhadnout ve vylepšeném algoritmu o něco těsněji.

Lemma N' (Nenasycená převedení): Algoritmus G' provede $\mathcal{O}(N^3)$ nenasycených převedení.

Důkaz: Dokazovat budeme opět pomocí potenciálové metody. Zadefinujme si potenciál *nejvyšší hladinu s přebytkem*:

$$H := \max\{h(v) \mid v \neq z, s \ \&\ f^{\Delta}(v) > 0\}.$$

Rozdělíme běh algoritmu na *fáze*. Každá fáze končí tím, že se H změní. Jak se může změnit? Buď se H zvýší, což znamená, že nějaký vrchol s přebytkem v nejvyšší hladině byl o 1 zvednut, nebo se H sníží. My víme, že zvednutí je v celém algoritmu $\mathcal{O}(N^2)$. Zároveň si můžeme uvědomit, že H je nezáporný potenciál, kdy snížení i zvýšení ho změní o 1, tedy počet snížení bude stejný jako počet zvýšení, a proto obojího je $\mathcal{O}(N^2)$. Tudíž počet fází je také $\mathcal{O}(N^2)$.

Je důležité, že během jedné fáze provedeme nejvýše jedno nenasycené převedení z každého vrcholu. Po každém nenasyceném převedení po hraně uv se totiž vynuluje přebytek v u a aby se provedlo další nenasycené převedení z vrcholu u, muselo by nejdříve být co převádět. Muselo by tedy do u něco přitéci. My ale víme, že převádíme pouze shora dolů a u je v nejvyšší hladině (to zajistí právě to vylepšení algoritmu), tedy nejdříve by musel být nějaký jiný vrchol zvednut. Tím by se ale změnilo H a skončila by tato fáze.

Proto počet všech nenasycených převedení během jedné fáze je nejvýše N. A již jsme dokázali, že fází je $\mathcal{O}(N^2)$. Tedy počet všech nenasycených převedení je $\mathcal{O}(N^3)$. ♡

Tento odhad je hezký, ale stále není těsný a algoritmus se chová lépe. Dokažme si ještě jeden těsnější odhad na počet nenasycených převedení.

Lemma N" (Nenasycená převedení): Počet nenasycených převedení je $\mathcal{O}(N^2\sqrt{M})$.

Poznámka: Tato časová složitost je výhodná například pro řídké grafy. Ty mají totiž poměrně malý počet hran.

Důkaz: Rozdělme si fáze na dva druhy: laciné a drahé podle toho, kolik se v nich provede nenasycených převedení. Zvolme si nějaké nezáporné K. Zatím nebudeme určovat jeho hodnotu. Uvidíme, že časová složitost algoritmu bude závislá na tomto parametru K. Proto jeho hodnotu zvolíme až později a to tak, aby byla složitost co nejnižší.

Laciné fáze budou ty, během nichž se provede nejvýše K nenasycených převedení. *Drahé fáze* budou ty ostatní, tedy takové, během nichž se provede více jak K nenasycených převedení.

Teď potřebujeme odhadnout, kolik nás budou stát oba typy fází. Začněme s těmi jednoduššími – s lacinými. Víme, že všech fází je $\mathcal{O}(N^2)$. Těch laciných bude tedy určitě také $O(N^2)$. Nenasycených převedení se během jedné laciné fáze provede nejvíce K. Tedy celkem se během laciných fází provede $\mathcal{O}(N^2K)$ nenasycených převedení.

Pro počet nenasycených převedení v drahých fázích si zaveďme nový potenciál definovaný následovně:

$$\Phi := \sum_{\substack{v \neq z,s \\ f^{\Delta}(v) \neq 0}} \frac{p(v)}{K},$$

kde $p(v)$ je počet takových vrcholů u, které nejsou výše než v. Neboli

$$p(v) = |\{u \in V \mid h(u) \leq h(v)\}|.$$

Tedy platí, že $p(v)$ je vždy nezáporné a nejvýše má hodnotu N. Dále víme, že Φ bude vždy nezáporné (neboť je to součet nezáporných členů) a nejvýše bude nabývat hodnoty $\frac{N^2}{K}$. Rozmysleme si, jak nám ovlivní tento potenciál naše tři operace:

- **Zvednutí**: Za každý zvednutý vrchol přibude nejvýše $\frac{N}{K}$ (tento vrchol může být nadzvednut nejvýše nad všechny ostatní vrcholy) a možná něco ubude (např. když vrchol vyzvedneme na úroveň k ostatním).
- **Nasycené převedení** po hraně uv: Může vynulovat přebytek ve vrcholu u, pak se Φ sníží. Může zvýšit přebytek ve v z nuly, pak se Φ zvýší. Ale

nejvýše se zvýší o $\frac{N}{K}$, neboť do Φ přibude jen jeden sčítanec za vrchol v a ten přispěje nejvýše hodnotou $\frac{N}{K}$ (pod ním může být nejvíce N vrcholů).

- **Nenasycená převedení** po hraně uv v drahých fázích: Tato operace vynuluje přebytek v u, tedy Φ klesne alespoň o $\frac{p(u)}{K}$. Zároveň může zvýšit přebytek ve v z nuly, ale Φ stoupne nejvýše o $\frac{p(v)}{K}$. Celkem tedy Φ klesne alespoň o $\frac{p(u)-p(v)}{K}$.

Uvědomme si, že pokud převádíme po hraně uv, tak platí, že $h(u) = h(v) + 1$. Pak $p(u) - p(v)$ je přesně počet vrcholů na hladině H. Těch je alespoň tolik, kolik je nenasycených převedení během jedné fáze (to jsme dokázali již v lemmatu N'), a my jsme si zadefinovali, že v drahé fázi je počet nenasycených převedení alespoň K. Tedy $p(u) - p(v) > K$. Proto během jednoho nenasyceného převedení Φ klesne alespoň o $\frac{K}{K} = 1$. Nenasycená převedení potenciál nezvyšují.

Potenciál Φ se může zvětšit pouze při operacích zvednutí a nasycené převedení. Zvednutí se provede celkem $\mathcal{O}(N^2)$ a každé zvýší potenciál nejvýše o $\frac{N}{K}$. Nasycených převedení se provede celkem $\mathcal{O}(NM)$ a každé zvýší potenciál taktéž nejvýše o $\frac{N}{K}$. Celkem se tedy Φ zvýší nejvýše o

$$\frac{N}{K}\mathcal{O}(N^2) + \frac{N}{K}\mathcal{O}(NM) = \mathcal{O}\left(\frac{N^3}{K} + \frac{N^2M}{K}\right).$$

Teď využijeme toho, že Φ je nezáporný potenciál, tedy když každé nenasycené převdení v drahé fázi sníží Φ alespoň o 1, tak všech nenasycených převdení v drahých fázích je $\mathcal{O}(\frac{N^3}{K} + \frac{N^2M}{K})$. Už jsme ukázali, že nenasycených převední v laciných fázích je $\mathcal{O}(N^2K)$. Proto celkem všech nenasycených převedení je

$$\mathcal{O}\left(N^2K + \frac{N^3}{K} + \frac{N^2M}{K}\right) = \mathcal{O}\left(N^2K + \frac{N^2M}{K}\right)$$

(neboť pro souvislé grafy platí, že $M \geq N \Rightarrow N^2M \geq N^3$). A my chceme, aby jich bylo co nejméně. Tato funkce má minimum tehdy, když $N^2K = \frac{N^2M}{K}$, čili $K = \sqrt{M}$.

Proto všech nenasycených převedení je $\mathcal{O}(N^2\sqrt{M})$. ♡