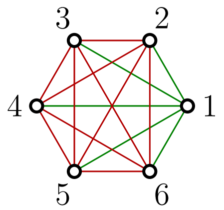
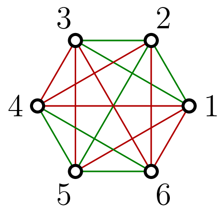
Jak přežít nudný večírek

Jistý matematik seděl na universitním večírku, spokojeně usrkával kávu a se zájmem pozoroval své poněkud rozjařené kolegy, zjevně holdující nápojům úplně jiného druhu. Napadlo ho: Potká-li se na večírku 6 lidí, vždy se mezi nimi buďto najdou 3, kteří se navzájem znají, nebo naopak 3, mezi nimiž žádný nezná žádného (předpokládáme-li tedy, že vztah „znát se“ je symetrický – zná-li se A s B, zná se i B s A).

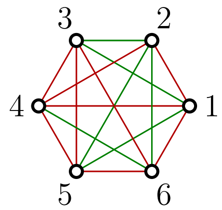
Nebo jinak: pokud v rovině nakreslíme 6 bodů a každé dva spojíme červenou nebo zelenou úsečkou (podle toho, jestli se tito dva lidé znají či neznají), vždy v obrázku najdeme jednobarevný trojúhelník. Může to vypadat třeba takto:



večírek ctitelů



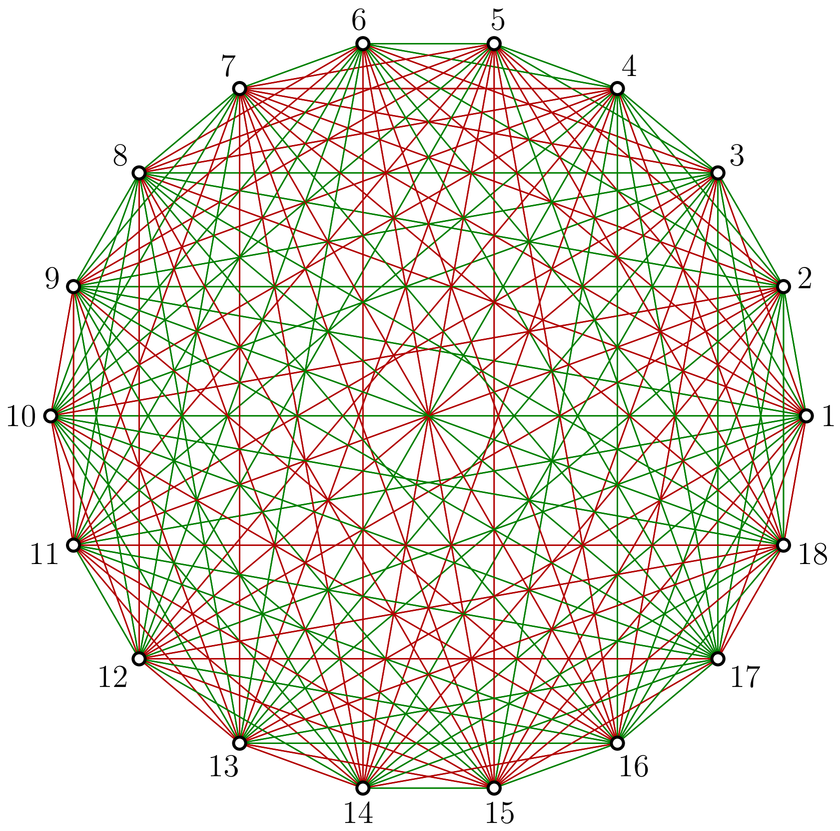
jednání dvou
mafiánských bossů



výroční schůze
klubu podivínů

Je to náhoda, nebo jednobarevný trojúhelník existuje při každém obarvení úseček?

A nemohlo by něco takového fungovat obecněji? Najdete třeba na následujícím obrázku 4 body spojené každý s každým úsečkami stejné barvy?



Řešení najdete na druhé straně.

Jak přežít nudný večírek – řešení

Rozdělme body 2 až 6 na dvě skupiny podle toho, jakou barvou jsou spojeny s bodem 1: do skupiny C dáme body připojené červeně, do skupiny Z ty připojené zeleně. Rozlišíme dva případy:

- Ve skupině C jsou alespoň 3 body. Vybereme si libovolné 3 z nich a podíváme se, jakou barvou jsou mezi sebou propojeny. Pokud všechny zeleně, máme zelený trojúhelník. V opačném případě je tam alespoň jedna červená úsečka a ta společně s bodem 1 vytváří červený trojúhelník.
- Skupina C je nejvýše dvojbodová. V takovém případě musí být alespoň 3 body ve skupině Z a můžeme provést tutéž úvahu, pouze s prohozenými barvami.

Tato hříčka je speciálním případem tzv. *Ramseyovy věty.* Ta říká, že pokud vezmeme dostatečný počet bodů a obarvíme jejich spojnice dvěma barvami, vždy bude existovat k-tice bodů taková, že všechny jejich spojnice mají stejnou barvu. Co znamená „dostatečný počet“, to samozřejmě závisí na k. Nejmenšímu počtu bodů, pro který věta platí, se pak říká *k-té Ramseyovo číslo* a značí se $R(k)$.

Náš příklad tedy ukazuje, že $R(3) \leq 6$. Dokonce platí rovnost, protože snadno najdete večírek s 5 lidmi, ve kterém žádný jednobarevný trojúhelník není.

A co druhý příklad, ve kterém jsme měli hledat čtveřici? Těch tam je dokonce 99 – třeba body 1, 2, 4, 16. A byly by tam i v libovolném jiném obarvení, protože je známo, že $R(4) = 18$. To vůbec není snadné spočítat, ale můžete se alespoň zkusit přesvědčit, že v následující konfiguraci 17 bodů už žádná jednobarevná čtveřice není. Mimochodem, taková konfigurace existuje až na očíslování bodů jediná.