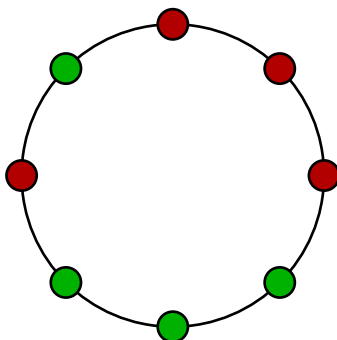


Jak otevřít sejf?

Jistý kódový zámek je vybaven červeným a zeleným tlačítkem a otevře se, pokud zadáte heslo složené ze 3 zmáčknutí tlačítka. Všimli jste si, že ho lze otevřít opravdu snadno: budete mačkat tlačítka podle následující posloupnosti (začít můžete kdekoliv) a dříve nebo později se každá z osmi trojic objeví:



Jak by to vypadalo pro větší počet tlačítek? Chtěli bychom sestavit co nejkratší cyklickou posloupnost barev, ve které se postupně vyskytnou všechny n -tice barev. Taková posloupnost jistě nemůže být kratší, než kolik je všech n -tic, tedy 2^n . Překvapivě, tohoto počtu lze vždy dosáhnout.

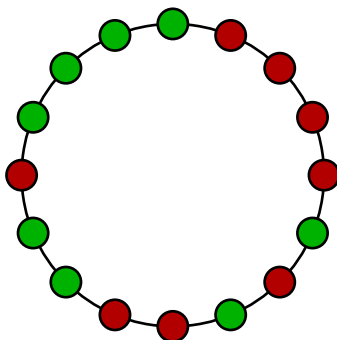
Zkuste přijít na to, jak to udělat, a pokud vás nenapadne obecný postup, zkuste to pro $n = 4$.



Řešení najdete na druhé straně.

Jak otevřít sejf – řešení

Hledaná posloupnost pro $n = 4$ může vypadat například takto:



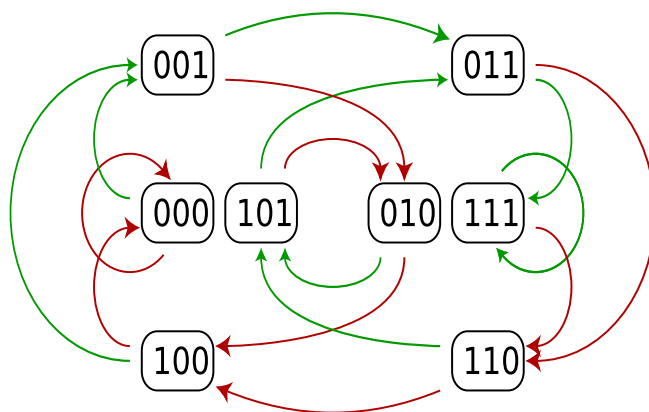
Jeden z nejhezčích způsobů, jak takovou posloupnost sestavit pro obecné n , využívá známou větu o kreslení obrázků jedním tahem. Konkrétně o kreslení *orientovaných grafů*. To jsou „obrázky“ složené z bodů, kterým budeme říkat *vrcholy*, a jejich spojnic, ty budeme nazývat *hrany*. Každá hrana bude *orientovaná*, tzn. budeme rozlišovat, kde má začátek a kde konec (budeme ji tedy kreslit jako šipku). Graf nazveme *souvislý*, pokud se dá z každého vrcholu dostat po šípkách do každého jiného vrcholu.

To, které grafy je možné nakreslit jedním *uzavřeným* tahem (tj. takovým, který skončí tam, kde začal), jde popsat velmi snadno. Platí totiž:

Věta: *Orientovaný graf je možné nakreslit jedním uzavřeným tahem právě tehdy, je-li souvislý a pro každý vrchol platí, že do něj vchází stejný počet hran, jako z něj vychází.*

Důkaz této věty je snadný a najdete ho například v Kapitolách z diskrétní matematiky od pánů Matouška a Nešetřila.

My tuto větu použijeme na následující graf, zvaný de Bruijnův:



De Bruijnův graf pro $n = 4$. Za obrázek děkujeme Davidu Eppsteinovi.

Jak tento graf vznikl? Jeho vrcholy jsou všechny uspořádané $(n - 1)$ -tice barev (respektive čísel 0 a 1). Hrany existují dvou druhů: červené a zelené. Z vrcholu x vede červená hrana do vrcholu y právě tehdy, když y vznikne z x smazáním první číslice a připsáním nuly na konec. Podobně zelené hrany odpovídají připsání jedničky.

Snadno nahlédneme, že de Bruijnův graf je pro každé n souvislý a do každého jeho vrcholu vcházejí dvě hrany a vycházejí také dvě. Splňuje tedy podmínky věty, takže ho lze nakreslit jedním uzavřeným tahem. A pořadí barev na tomto tahu je přesně hledaná posloupnost.