6. série

(13. listopadu 2008)

1. úloha Najděte nějakou explicitní bijekci $f\colon (0,1) \to [0,1]$.

2. úloha Nechť $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ je soubor úseček v rovině takový, že žádné dvě úsečky z $\mathcal{S}$ nemají společný bod ani neleží na jedné přímce. Rozhodněte, zda je vždy možné spojit krajní body úseček $\mathcal{S}$ dalšími n úsečkami tak, aby vznikla neprotínající se uzavřená lomená čáru obsahující všechny úsečky z $\mathcal{S}$.

3. úloha Rozhodněte, zda existuje funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která má v každém bodě vlastní limitu, ale v žádném bodě není spojitá.

4. úloha Máme n trezorů a n klíčů (každý klíč pasuje do právě jednoho trezoru). Klíče náhodně umístíme do trezorů. Přijdou zloději a rozbijou $k \geq n$ trezorů. Určete pravděpodobnost, že se jim poté podaří otevřít všechny trezory.

5. úloha Nechť $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_k\}$ je konečná množina nadrovin v $\mathbb{R}^n$. Dokažte, že existuje omezená podmnožina $K \subset \mathbb{R}^n$ obsahující počátek a obsahující svoji kolmou projekci na každou nadrovinu $H_i \in \mathcal{H}$.

6. úloha Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, které jsou konstantní na jednotkové sféře a splňují

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^3$.