3. série

(23. října 2008)

1. úloha Nechť $A_1, A_2, \dots, A_{2^n-1}$ jsou mřížové body v $\mathbb{R}^n$. Dokažte, že existuje mřížový bod $P \in \mathbb{R}^n$ různý od bodů $A_1, A_2, \dots, A_{2^n-1}$ takový, že úsečky $PA_1, PA_2, \dots, PA_{2^n-1}$ neobsahují jako svůj vnitřní bod žádný mřížový bod.

2. úloha Určete hodnotu součinu

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}}.$$

3. úloha Najděte funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že $f'(0) = 2008$, ale f není rostoucí na žádném okolí nuly (tj. otevřeném intervalu obsahujícím nulu).

4. úloha Nechť M je konvexní mnohoúhelník v rovině s těžištěm T. Tětivou nazveme každou úsečku, jejíž koncové body leží na obvodu M. Dokažte, že bod T je středem alespoň tří různých tětiv mnohoúhelníku M.

5. úloha Rozhodněte, zda existuje nespočetný řetězec (vzhledem k inkluzi) podmnožin přirozených čísel? Systém S množin tvoří řetězec vzhledem k inkluzi, jestliže pro každé dvě množiny M_1, M_2 z S platí, že je buď $M_1 \subseteq M_2$ nebo $M_2 \subseteq M_1$.

6. úloha Nechť $(S, \vee, \wedge)$ je svaz. Pro každé $a, b \in S$ neporovnatelné spojíme $a \vee b$ a $a \wedge b$ hranou. Ukažte, že vrcholy každé souvislé komponenty vzniklého grafu tvoří podsvaz svazu S. Svaz je částečně uspořádaná množina $(S, \leq)$ taková, že pro každé dva prvky $a, b \in S$ existuje jejich supremum a infimum. Supremum je prvek $a \vee b$ takový, že $a \vee b \geq a, b$ a kdykoliv $x \geq a, b$, potom $x \geq a \vee b$. Infimum $a \wedge b$ je definováno analogicky.