Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Nechť G je libovolný graf na $2n$ vrcholech, jehož každý vrchol má stupeň alespoň n. Dokažte, že G je hranově n-souvislý.

Úloha 2: Dokažte, že každý vrcholově 2-souvislý graf na n vrcholech má alespoň n koster. Kdy nastává rovnost?

Úloha 3: Dokažte následující tvrzení: Nechť G je (vrcholově) 2-souvislý graf a u, v dva jeho vrcholy. Potom existuje kružnice v G obsahující u i v.

Úloha 4: Ukažte, že graf je dvousouvislý, právě když

a) je bez izolovaných vrcholů a každé dvě hrany leží na společném cyklu.

b) je souvislý a každé dvě sousední hrany leží na společném cyklu.

Úloha 5: Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení:

a) Nechť G je vrcholově 2-souvislý graf a u, v, w, z čtyři jeho vrcholy. Potom existuje kružnice v G obsahující všechny tyto vrcholy.

b) Nechť G je vrcholově 3-souvislý graf a y, n dva jeho vrcholy. Potom existuje kružnice v G procházející vrcholem y a neprocházející vrcholem n.

Úloha 6: Dokažte následující zobecnění Mengerovy věty:

a) Graf G je k-souvislý právě tehdy, když pro každý jeho vrchol v a množinu $A \in \binom{V(G)}{k}$ existuje k cest mezi v a vrcholy množiny A, které jsou vrcholově disjunktní až na vrchol v. (Tyto cesty tvoří „vějíř“v grafu G.)

b) Graf G je k-souvislý právě tehdy, když pro každé dvě množiny vrcholů $A, B \in \binom{V(G)}{k}$ (ne nutně disjunktní) existuje k vrcholově disjunktních cest, jejichž jeden krajní vrchol leží v A a druhý v B.

Úloha 7: Pro jaké největší k existuje rovinný vrcholově k-souvislý graf?

Úloha 8: Hyperkrychle dimenze d budeme říkat grafu Q_d, jehož vrcholy jsou všechny posloupnosti d nul a jedniček a dva vrcholy jsou spojené hranou, pokud se jejich posloupnosti liší na právě jedné pozici. Určete, jakou má graf Q_d vrcholovou a hranovou souvislost.

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Nechť G je libovolný graf na $2n$ vrcholech, jehož každý vrchol má stupeň alespoň n. Dokažte, že G je hranově n-souvislý.

Úloha 2: Dokažte, že každý vrcholově 2-souvislý graf na n vrcholech má alespoň n koster. Kdy nastává rovnost?

Úloha 3: Dokažte následující tvrzení: Nechť G je (vrcholově) 2-souvislý graf a u, v dva jeho vrcholy. Potom existuje kružnice v G obsahující u i v.

Úloha 4: Ukažte, že graf je dvousouvislý, právě když

a) je bez izolovaných vrcholů a každé dvě hrany leží na společném cyklu.

b) je souvislý a každé dvě sousední hrany leží na společném cyklu.

Úloha 5: Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení:

a) Nechť G je vrcholově 2-souvislý graf a u, v, w, z čtyři jeho vrcholy. Potom existuje kružnice v G obsahující všechny tyto vrcholy.

b) Nechť G je vrcholově 3-souvislý graf a y, n dva jeho vrcholy. Potom existuje kružnice v G procházející vrcholem y a neprocházející vrcholem n.

Úloha 6: Dokažte následující zobecnění Mengerovy věty:

a) Graf G je k-souvislý právě tehdy, když pro každý jeho vrchol v a množinu $A \in \binom{V(G)}{k}$ existuje k cest mezi v a vrcholy množiny A, které jsou vrcholově disjunktní až na vrchol v. (Tyto cesty tvoří „vějíř“v grafu G.)

b) Graf G je k-souvislý právě tehdy, když pro každé dvě množiny vrcholů $A, B \in \binom{V(G)}{k}$ (ne nutně disjunktní) existuje k vrcholově disjunktních cest, jejichž jeden krajní vrchol leží v A a druhý v B.

Úloha 7: Pro jaké největší k existuje rovinný vrcholově k-souvislý graf?

Úloha 8: Hyperkrychle dimenze d budeme říkat grafu Q_d, jehož vrcholy jsou všechny posloupnosti d nul a jedniček a dva vrcholy jsou spojené hranou, pokud se jejich posloupnosti liší na právě jedné pozici. Určete, jakou má graf Q_d vrcholovou a hranovou souvislost.