Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Pro množinový systém $(X, \mathcal{P})$ uvažujme podmínky:

(P0a) $\exists P_1, P_2 \in \mathcal{P} : P_1 \neq P_2$ a $|P_1|, |P_2| \geq 3$.

(P0b) X nelze pokrýt dvěma přímkami (tj. množinami z $\mathcal{P}$).

Ještě připomeňme podmínky z definice konečných projektivních rovin:

(P0) Existuje čtyřbodová $\check{C}$ taková, že $|\check{C} \cap P| \leq 2, \forall P \in \mathcal{P}$.

(P1) Každé dvě různé množiny $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ mají jednobodový průnik.

(P2) Pro každé $x, y \in X$, $x \neq y$ existuje právě jedna $P \in \mathcal{P}$ obsahující x i y.

Dokažte, že konečný množinový systém $(X, \mathcal{P})$ je konečná projektivní rovina, právě když splňuje (P0a), (P1), (P2); resp. právě když splňuje (P0b), (P1), (P2).

Úloha 2: Nahradíme (nultý) axiom konečných projektivních rovin o existenci čtyř bodů v obecné poloze tím, že každá přímka obsahuje alespoň dva body. Každá konečná projektivní rovina podle původní definice bude vyhovovat i té nové, ale opačně to neplatí. Které další množinové systémy nová definice připouští?

Úloha 3: Ve hře Spot it (v Evropě prodávané pod názvem Dobble) je 55 karet, přičemž na každé kartě je 8 symbolů a každé dvě karty mají právě jeden symbol společný.

V návodu se dočtete, že ve hře najdete přes 50 různých symbolů. Dokažte, že jich musí být ještě o trochu více.

Úloha 4: Nechť $(X, \mathcal{P})$ je konečná projektivní rovina řádu n. Určete:

a) minimální možnou mohutnost množiny $Y \subseteq X$ takové, že $\forall P \in \mathcal{P} : P \cap Y \neq \emptyset$.

b) minimální možnou mohutnost množiny $Z \subseteq X$ takové, že $\forall P \in \mathcal{P} : |P \cap Z| \geq 2$.

Úloha 5: Nechť $(X, \mathcal{P})$ je množinový systém a pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí:

(1) $|X| = |\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$,

(2) $\forall P \in \mathcal{P} : |P| = n + 1$,

(3) $\forall P, Q \in \mathcal{P} : P \neq Q \Rightarrow |P \cap Q| \leq 1$.

Je potom $(X, \mathcal{P})$ konečná projektivní rovina řádu n?

Úloha 6: Nechť $(X, \mathcal{P})$ je množinový systém a pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí:

— $|X| = |\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$,

— $\forall P \in \mathcal{P} : |P| = n + 1$ a

— $\forall x \in X : |\{P \in \mathcal{P} : x \in P\}| = n + 1$.

Je pak $(X, \mathcal{P})$ konečná projektivní rovina?

Úloha 7: Dokažte, že pro konečnou projektivní rovinu dostatečně vysokého řádu platí zobecnění axiomu pro čtveřice:

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro $(X, \mathcal{P})$ konečnou projektivní rovinu řádu alespoň n existuje k bodů v obecné poloze, tedy množina $K \subseteq X, |K| = k$ splňující $\forall P \in \mathcal{P} : |K \cap P| \leq 2$.

Úloha 8: Dokažte, že pro nekonečně mnoho různých n existují grafy na n vrcholech s $\Omega(n^{3/2})$ hranami, které neobsahují jako podgraf čtyřcyklus (C_4). Ke konstrukci můžete elegantně využít konečné projektivní roviny.

Úloha 9: Nechť $(X, \mathcal{P})$ je konečná projektivní rovina řádu q. Vytvořme bipartitní graf $G = G(X, \mathcal{P})$ s částmi X a $\mathcal{P}$ tak, že bod z $x \in X$ a přímka z $p \in \mathcal{P}$ jsou spojeny hranou, právě když x náleží p.

a) Určete obvod g grafu G. (Obvodem grafu, který obsahuje alespoň jednu kružnici, rozumíme velikost nejmenší kružnice v grafu obsažené.)

b) Určete počet kružnic v G velikosti g.

c) Nechť H je bipartitní $(q + 1)$-regulární graf (tj. každý vrchol má stupeň $q + 1$) pro $q \geq 2$, bez kružnic velikosti 4 a takový, že mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta délky nejvýše 3 spojující tyto dva vrcholy. Dokažte, že H je izomorfní $G(X', \mathcal{P}')$ pro nějakou konečnou projektivní rovinu $(X', \mathcal{P}')$ řádu q.