

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: V následujících úlohách nejprve vyjádřete hledaný počet jako koeficient u nějaké mocniny x ve vhodném součinnu mnohočlenu.

Poté se pokuste přislušný koeficient spočítat.

a) V cukrárně prodávají tři druhy zákusků — věrníčky, krenrole a punčové dortíky. Kolikla způsoby lze koupit 12 zákusků tak, aby se od každého druhu koupily alespoň dva zákusky a přitom nejvýš tři krenrole?

b) Kolikla způsoby lze rozdělit 10 stejných balónků dvěma chlapčkům a dvěma holčičkám, má-li každý chlapček dostat aspoň jeden balónek a každá holčička nejméně dva?

Úloha 2: Vyjádřete v co nejjednodušším tvaru $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^k})$.

Úloha 3: Kolikla způsoby lze naplnit košík n ovocnými plody za následujících (poněkud neobvyklých) podmínek?

- Počet jablek musí být sudý,
- počet banánů je dělitelný pěti,
- v košíku jsou nejvýše čtyři pomeranče
- a jedna nebo žádná hruška.

Úloha 4: Sestrojte vytvořující funkce pro následující posloupnosti (nepoužívejte v jejich zápisu nekonečné řady!):

- a) $(1, 1, 1, 1, 1, \dots)$
- b) $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$
- c) $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$
- d) $(1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$
- e) $(1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots)$
- f) $(1, 2, 1, 4, 1, 8, \dots)$
- g) $(1, -3, 5, -7, 9, -11, \dots)$
- h) $(0, 1, 1, 2, 2, 4, 3, 8, 4, 16, \dots, i, 2^i, \dots)$

Úloha 5: Určete koeficient u příslušné mocniny x ve výrazech:

- a) $u x^{15}$ v $(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^4$
- b) $u x^5$ v $(1 - 2x)^{-2}$
- c) $u x^4$ v $(1 + x)^{1/3}$
- d) $u x^i$ v $\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$

Úloha 6: Zjistěte, jaká je pravděpodobnost, že při hodů 12 hracími kostkami hodíme dohromady přesně 30 ok.

Úloha 7: Sestrojte dvě šestistěnné kostky takové, že na jejich stěnách jsou napsána přirozená čísla (stejně číslo může být napsáno na více stěnách, nula není přirozené číslo). Pro libovolné k platí, že pravděpodobnost, že po hodů těmito dvěma kostkami padne součet k je stejná jako při hodů standardními (pocitými) kostkami, přitom se ale o standardní kostky nejedná.

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: V následujících úlohách nejprve vyjádřete hledaný počet jako koeficient u nějaké mocniny x ve vhodném součinnu mnohočlenu.

Poté se pokuste přislušný koeficient spočítat.

a) V cukrárně prodávají tři druhy zákusků — věrníčky, krenrole a punčové dortíky. Kolikla způsoby lze koupit 12 zákusků tak, aby se od každého druhu koupily alespoň dva zákusky a přitom nejvýš tři krenrole?

b) Kolikla způsoby lze rozdělit 10 stejných balónků dvěma chlapčkům a dvěma holčičkám, má-li každý chlapček dostat aspoň jeden balónek a každá holčička nejméně dva?

Úloha 2: Vyjádřete v co nejjednodušším tvaru $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^k})$.

Úloha 3: Kolikla způsoby lze naplnit košík n ovocnými plody za následujících (poněkud neobvyklých) podmínek?

- Počet jablek musí být sudý,
- počet banánů je dělitelný pěti,
- v košíku jsou nejvýše čtyři pomeranče
- a jedna nebo žádná hruška.

Úloha 4: Sestrojte vytvořující funkce pro následující posloupnosti (nepoužívejte v jejich zápisu nekonečné řady!):

- a) $(1, 1, 1, 1, 1, \dots)$
- b) $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$
- c) $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$
- d) $(1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$
- e) $(1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots)$
- f) $(1, 2, 1, 4, 1, 8, \dots)$
- g) $(1, -3, 5, -7, 9, -11, \dots)$
- h) $(0, 1, 1, 2, 2, 4, 3, 8, 4, 16, \dots, i, 2^i, \dots)$

Úloha 5: Určete koeficient u příslušné mocniny x ve výrazech:

- a) $u x^{15}$ v $(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^4$
- b) $u x^5$ v $(1 - 2x)^{-2}$
- c) $u x^4$ v $(1 + x)^{1/3}$
- d) $u x^i$ v $\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$

Úloha 6: Zjistěte, jaká je pravděpodobnost, že při hodů 12 hracími kostkami hodíme dohromady přesně 30 ok.

Úloha 7: Sestrojte dvě šestistěnné kostky takové, že na jejich stěnách jsou napsána přirozená čísla (stejně číslo může být napsáno na více stěnách, nula není přirozené číslo). Pro libovolné k platí, že pravděpodobnost, že po hodů těmito dvěma kostkami padne součet k je stejná jako při hodů standardními (pocitými) kostkami, přitom se ale o standardní kostky nejedná.