# Úlohy ke cvičení

*Úloha 1:* Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro každý graf $G = (V, E)$ s alespoň $n$ vrcholy a každé jeho obarvení hran $c : E \to \{1, 2\}$ existuje $U \subseteq V$ velikosti alespoň $k$ taková, že všechny hrany indukovaného podgrafu $G[U]$ mají stejnou barvu.

*Úloha 2:* Dokažte následující variantu Ramseyovy věty: Pro každé $n$ (velikost požadovaného podgrafu) a každé $k$ (počet barev) existuje $N$ takové, že pro libovolnou dvojici obarvení hran $c_1$, $c_2$ úplného grafu na $N$ vrcholech (tedy funkce $c_1, c_2 : \binom{\{1,\ldots,N\}}{2} \to \{1, \ldots, k\}$) existuje úplný podgraf velikosti $n$, který je jednobarevný jak v obarvení $c_1$, tak v obarvení $c_2$.

*Úloha 3:* Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

a) Pro každé přirozené $n$ existuje přirozené $N$ takové, že jsou-li vrcholy úplného grafu $K_N$ obarveny dvěma barvami, potom v uvažovaném grafu je úplný podgraf $K_n$ jehož všechny vrcholy jsou obarveny toutéž barvou.

b) Obarvíme-li dostatečně velký úplný graf se smyčkami dvěma barvami (barvíme hrany a smyčky), vždy existuje jednobarevný úplný podgraf se smyčkami na $n$ vrcholech.

c) Pro každé přirozené číslo $n$ existuje přirozené $N$ takové, že pro libovolný graf $G$ na $N$ vrcholech platí: buď $G$ obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf nebo **doplněk** $G$ obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf. (Zmiňovaný podgraf nemusí být indukovaný.)

d) Pro každé přirozené číslo $n$ existuje přirozené $N$ takové, že pro libovolný graf $G$ na $N$ vrcholech platí: buď $G$ obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf nebo $G$ obsahuje **doplněk** $K_{n,n}$ jako podgraf. (Zmiňovaný podgraf nemusí být indukovaný.)

*Úloha 4:* Hrany úplného grafu $K_n$ jsou obarveny červeně a modře. Dokažte, že v tomto grafu najdeme buď modrý trojúhelník nebo červený čtyřcyklus pro

a) $n = 9$.

b) $n = 8$.

*Úloha 5:* Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že libovolných $n$ bodů v rovině obsahuje:

a) buď $k$ bodů na přímce nebo $k$ bodů v obecné poloze.

b) buď $k$ bodů na přímce nebo $k$ bodů v konvexní poloze.

*Úloha 6:* Ukažte, že jsou-li body eukleidovské roviny libovolně obarveny pomocí tří barev, pak lze vždy nalézt dva body stejné barvy v jednotkové vzdálenosti.

*Úloha 7:* Ukažte, že obarvíme-li libovolně hrany úplného grafu na alespoň třech vrcholech dvěma barvami, potom lze vždy nalézt hamiltonovskou kružnici takovou, že je buď celá jednobarevná, nebo její hrany lze rozdělit na dvě jednobarevné cesty.

*Úloha 8:* Mřížové body v rovině jsou obarveny 2015 barvami. Ukažte, že lze zvolit 2014 řádků a 2016 sloupců tak, že všechny jejich průsečíky mají stejnou barvu.

(Mřížové body jsou body, které mají obě souřadnice celočíselné. Řádek je tvořen body se stejnou souřadnicí $y$, a podobně sloupec pro souřadnici $x$.)

*Úloha 9:*

a) Ukažte, že v každé dostatečně dlouhé číselné posloupnosti lze nalézt buď nerostoucí podposloupnost délky $a + 1$ nebo neklesající podposloupnost délky $b + 1$.

(Nalezněte nějaký odhad pro potřebnou délku posloupnosti.)

b) Ukažte, že monotonní podposloupnost z předchozí varianty existuje v každé posloupnosti délky $ab + 1$.