Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Dokažte následující odhad faktoriálu: $n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

Úloha 2: Jakou nejvyšší mocninou 5 je dělitelné 50! ? Určete obecný vzorec pro prvočíslo p a faktoriál čísla n.

Úloha 3: Ukažte, že $(k!)^n$ dělí $(kn)!$.

Úloha 4: Porovnejte a uspořádejte následující kombinační čísla:
$\binom{80}{20}, \binom{90}{10}, \binom{90}{70}, \binom{90}{30}, \binom{80}{70}, \binom{80}{60}$.

Úloha 5: Zkuste odhadnout $\binom{2m+1}{m}$ z obou stran pomocí $\binom{2m}{m}$.

Úloha 6: Nechť a je kladné reálné číslo, pro které platí nerovnost $1 + x \leq a^x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že potom $a = e$.

Úloha 7: Dokažte dolní odhad faktoriálu: $e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n!$

Úloha 8: Odhadněte součet řady $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Úloha 9: V analýze algoritmů se občas objevuje tzv. harmonické číslo

$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a) Pro $n = 2^m$ dokažte $1 + \frac{m}{2} \leq H_n \leq 1 + m$.

b) Dokažte obecný odhad $\ln n \leq H_n \leq 1 + \ln n$.

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Dokažte následující odhad faktoriálu: $n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

Úloha 2: Jakou nejvyšší mocninou 5 je dělitelné 50! ? Určete obecný vzorec pro prvočíslo p a faktoriál čísla n.

Úloha 3: Ukažte, že $(k!)^n$ dělí $(kn)!$.

Úloha 4: Porovnejte a uspořádejte následující kombinační čísla:
$\binom{80}{20}, \binom{90}{10}, \binom{90}{70}, \binom{90}{30}, \binom{80}{70}, \binom{80}{60}$.

Úloha 5: Zkuste odhadnout $\binom{2m+1}{m}$ z obou stran pomocí $\binom{2m}{m}$.

Úloha 6: Nechť a je kladné reálné číslo, pro které platí nerovnost $1 + x \leq a^x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že potom $a = e$.

Úloha 7: Dokažte dolní odhad faktoriálu: $e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n!$

Úloha 8: Odhadněte součet řady $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Úloha 9: V analýze algoritmů se občas objevuje tzv. harmonické číslo

$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a) Pro $n = 2^m$ dokažte $1 + \frac{m}{2} \leq H_n \leq 1 + m$.

b) Dokažte obecný odhad $\ln n \leq H_n \leq 1 + \ln n$.