

Jméno:

1	2	3	4	$\Sigma$

---

Zkouška z Diskrétní matematiky — písemná část (vzor)

---

- U početních příkladů je kromě konečného výsledku nutné uvést i správný postup řešení (všechny kroky pořádně zdůvodňujte).
  - Číselné výsledky nemusíte upravovat. Například odpověď  $2^3 \binom{5}{2}$  je stejně dobrá jako odpověď 80.
- 

1. Definujte symetrickou a tranzitivní relaci na množině  $X$ . Kolik je symetrických relací na  $n$ -prvkové množině? [5 bodů]

2. Popište Jarníkův algoritmus pro hledání minimální kostry. Dále uvažujte graf  $G = (V, E)$ , kde

$$V = \binom{[4]}{2} = \binom{\{1, 2, 3, 4\}}{2}$$

a

$$E = \left\{ v_1 v_2 \in \binom{V}{2} : v_1 \cap v_2 \neq \emptyset \right\}.$$

Nakreslete tento graf a také v něm nalezněte nějakou minimální kostru, kdy váha hrany  $e = v_1 v_2 \in \binom{V}{2}$  je taková hodnota  $w(e)$ , že  $v_1 \cap v_2 = \{w(e)\}$  (tedy například váha hrany  $\{1, 2\}\{2, 4\}$  je 2). [7 bodů]

3. Mějme graf  $G = (V, E)$  a necht'  $A$  je matice sousednosti  $G$ . Necht'  $B = A^2$  je její druhá mocnina. Dokažte, že součet prvků na hlavní diagonále matice  $B$  je roven  $2|E|$ . Tedy ukažte, že

$$\sum_{i=1}^n b_{ii} = 2|E|, \quad \text{pokud} \quad B = (b_{ij})_{i,j=1}^n.$$

Můžete využívat tvrzení dokázaná na přednášce. (Pokud příklad neumíte vyřešit, definujte alespoň matici sousednosti.) [9 bodů]

4. Formulujte a dokažte Eulerův vzorec pro rovinné grafy. [9 bodů]