

Úlohy k cvičení

Úloha 1: Ukažte, že každá kostra (souvislého grafu) obsahuje všechny mosty, tedy hrany, po jejichž odebrání graf přestane být souvislý.

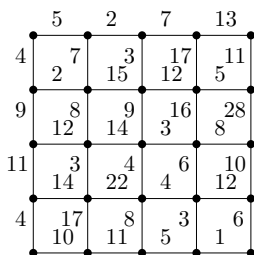
Úloha 2: Ukažte, že pro každou kosteru K grafu G a hranu $e \in E(G) \setminus E(K)$ existují dvě hrany kostry e' a e'' takové, že po přidání e ke K a odebrání právě jedné z hran e' a e'' dotaneme opět kosteru G .

Úloha 3: Pro která n existuje graf s právě n různými kosterami?

Úloha 4: Určete kolik koster má:

- (i) graf čínky, tj. graf s dvěma disjunktními cykly s m a n vrcholy spojenými cestou délky ℓ ;
- (ii) tzv. Θ -graf, tj. graf obsahující dva vrcholy a a b a dále tři cesty (disjuntní až na koncové vrcholy) spojující a a b délek ℓ , m a n . (A nic dalšího graf neobsahuje.)

Úloha 5: Najděte (nějakou) minimální kosteru (vážené) mřížky na obrázku.



Úloha 6: Určete počet kružnic (všech možných délek) v grafu K_n . (Výsledek vyjádřete pomocí sumy.)

Úloha 7: Dokažte, že počet kružnic v $K_{n,n}$ je $\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{2^{k!(k-1)!}}{2}$.

Úloha 8: Nechť X je konečná množina a \mathcal{A} je množina některých jejích podmnožin uzavřená na symetrickou diferenci. Tedy, pokud Y a Z patří do \mathcal{A} , potom také $Y \Delta Z$ patří do \mathcal{A} .

- (a) Ukažte, že \mathcal{A} společně s operací symetrické difference tvoří vektorový prostor nad \mathbb{Z}_2 .
- (b) V závislosti na velikosti \mathcal{A} určete dimenzi tohoto prostoru. Jakých hodnot tedy může $|\mathcal{A}|$ nabývat.

Úloha 9: Určete dimenzi prostoru cyklů mřížky $m \times n$.

*Úloha 10**:* Uvažujme úplný graf $K_5 = (V, E)$. Uvažujme vektorový prostor tvořený všemi podmnožinami E^2 s operací symetrické difference a dále jeho podprostor \mathcal{A} generovaný dvojicemi kružnic. Tedy \mathcal{A} je nejmenší podprostor takový, že kdykoliv jsou E_1, E_2 množiny hran dvou kružnic v K_5 , potom do \mathcal{A} patří množina $\{(e_1, e_2) : e_1 \in E_1, e_2 \in E_2\}$. Nalezněte v \mathcal{A} neprázdný prvek X (tj. nenulový vektor) takový, že kdykoliv $(e_1, e_2) \in X$, potom $e_1 \cap e_2 = \emptyset$ (tedy e_1 a e_2 nesdílejí žádný vrchol).