Úlohy k cvičení

Úloha 1: Ukažte, že každá kostra (souvislého grafu) obsahuje všechny mosty, tedy hrany, po jejichž odebrání graf přestane být souvislý.

Úloha 2: Ukažte, že pro každou kostru K grafu G a hranu $e \in E(G) \setminus E(K)$ existují dvě hrany kostry e' a e'' takové, že po přidání e ke K a odebrání právě jedné z hran e' a e'' dotaneme opět kostru G.

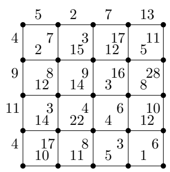
Úloha 3: Pro která n existuje graf s právě n různými kostrami?

Úloha 4: Určete kolik koster má:

(i) graf čínky, tj. graf s dvěma disjunktními cykly s m a n vrcholy spojenými cestou délky ℓ;

(ii) tzv. Θ-graf, tj. graf obsahující dva vrcholy a a b a dále tři cesty (disjuntní až na koncové vrcholy) spojující a a b délek ℓ, m a n. (A nic dalšího graf neobsahuje.)

Úloha 5: Najděte (nějakou) minimální kostru (vážené) mřížky na obrázku.



Úloha 6: Určete počet kružnic (všech možných délek) v grafu K_n. (Výsledek vyjádřete pomocí sumy.)

Úloha 7: Dokažte, že počet kružnic v $K_{n,n}$ je $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}^2 \frac{k!(k-1)!}{2}$.

Úloha 8: Nechť X je konečná množina a $\mathcal{A}$ je množina některých jejích podmnožin uzavřená na symetrickou diferenci. Tedy, pokud Y a Z patří do $\mathcal{A}$, potom také $Y \Delta Z$ patří do A.

(a) Ukažte, že $\mathcal{A}$ společně s operací symetrické diference tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{Z}_2$.

(b) V závislosti na velikosti $\mathcal{A}$ určete dimenzi tohoto prostoru. Jakých hodnot tedy může $|\mathcal{A}|$ nabývat.

Úloha 9: Určete dimenzi prostoru cyklů mřížky $m \times n$.

*Úloha 10**:* Uvažujme úplný graf $K_5 = (V, E)$. Uvažujme vektorový prostor tvořený všemi podmnožinami E^2 s operací symetrické diference a dále jeho podprostor $\mathcal{A}$ generovaný dvojicemi kružnic. Tedy $\mathcal{A}$ je nejmenší podprostor takový, že kdykoliv jsou E_1, E_2 množiny hran dvou kružnic v K_5, potom do $\mathcal{A}$ patří množina $\{(e_1, e_2) \colon e_1 \in E_1, e_2 \in E_2\}$. Nalezněte v $\mathcal{A}$ neprázdný prvek X (tj. nenulový vektor) takový, že kdykoliv $(e_1, e_2) \in X$, potom $e_1 \cap e_2 = \emptyset$ (tedy e_1 a e_2 nesdílejí žádný vrchol).

Úlohy k cvičení

Úloha 1: Ukažte, že každá kostra (souvislého grafu) obsahuje všechny mosty, tedy hrany, po jejichž odebrání graf přestane být souvislý.

Úloha 2: Ukažte, že pro každou kostru K grafu G a hranu $e \in E(G) \setminus E(K)$ existují dvě hrany kostry e' a e'' takové, že po přidání e ke K a odebrání právě jedné z hran e' a e'' dotaneme opět kostru G.

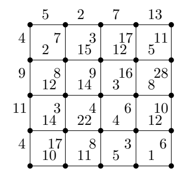
Úloha 3: Pro která n existuje graf s právě n různými kostrami?

Úloha 4: Určete kolik koster má:

(i) graf čínky, tj. graf s dvěma disjunktními cykly s m a n vrcholy spojenými cestou délky ℓ;

(ii) tzv. Θ-graf, tj. graf obsahující dva vrcholy a a b a dále tři cesty (disjuntní až na koncové vrcholy) spojující a a b délek ℓ, m a n. (A nic dalšího graf neobsahuje.)

Úloha 5: Najděte (nějakou) minimální kostru (vážené) mřížky na obrázku.



Úloha 6: Určete počet kružnic (všech možných délek) v grafu K_n. (Výsledek vyjádřete pomocí sumy.)

Úloha 7: Dokažte, že počet kružnic v $K_{n,n}$ je $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}^2 \frac{k!(k-1)!}{2}$.

Úloha 8: Nechť X je konečná množina a $\mathcal{A}$ je množina některých jejích podmnožin uzavřená na symetrickou diferenci. Tedy, pokud Y a Z patří do $\mathcal{A}$, potom také $Y \Delta Z$ patří do A.

(a) Ukažte, že $\mathcal{A}$ společně s operací symetrické diference tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{Z}_2$.

(b) V závislosti na velikosti $\mathcal{A}$ určete dimenzi tohoto prostoru. Jakých hodnot tedy může $|\mathcal{A}|$ nabývat.

Úloha 9: Určete dimenzi prostoru cyklů mřížky $m \times n$.

*Úloha 10**:* Uvažujme úplný graf $K_5 = (V, E)$. Uvažujme vektorový prostor tvořený všemi podmnožinami E^2 s operací symetrické diference a dále jeho podprostor $\mathcal{A}$ generovaný dvojicemi kružnic. Tedy $\mathcal{A}$ je nejmenší podprostor takový, že kdykoliv jsou E_1, E_2 množiny hran dvou kružnic v K_5, potom do $\mathcal{A}$ patří množina $\{(e_1, e_2) \colon e_1 \in E_1, e_2 \in E_2\}$. Nalezněte v $\mathcal{A}$ neprázdný prvek X (tj. nenulový vektor) takový, že kdykoliv $(e_1, e_2) \in X$, potom $e_1 \cap e_2 = \emptyset$ (tedy e_1 a e_2 nesdílejí žádný vrchol).