Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Dokažte, že každý eulerovský graf je disjunktním sjednocením kružnic.

Úloha 2: Charakterizujte všechny grafy, které mají (ne nutně uzavřený) eulerovský tah.

Úloha 3: Nalezněte algoritmus pro nalezení nejkratšího uzavřeného sledu, jež obsahuje všechny hrany daného grafu (sled je posloupnost navazujících hran, kde se hrany i vrcholy mohou opakovat). Pro jednoduchost předpokládejte, že graf má nejvýše 6 vrcholů lichého stupně.

Úloha 4: Dokažte: Orientovaný graf G má uzavřený eulerovský tah právě tehdy, když G je silně souvislý a vstupní stupeň každého vrcholu je roven jeho výstupnímu stupni.

Také dokažte silnější variantu tohoto tvrzení, kde silná souvislost je nahrazena slabou souvislostí.

(Silná souvislost znamená, že mezi každou dvojicí vrcholů u a v vede jak orientovaná cesta z u do v, tak orientovaná cesta z v do u. Slabá souvislost znamená, že mezi libovolnými dvěma vrcholy vede cesta jejíž hrany mohou být orientovány jak po, tak proti směru cesty.)

Úloha 5: Ukažte, že je-li graf G eulerovský, pak je jeho line graf též eulerovský.

Line graf $L(G)$ má za vrcholy hrany G a dva vrcholy v $L(G)$ reprezentující hrany e a f spolu sousedí právě když e a f mají společný vrchol.

Úloha 6: Dokažte: graf G je strom právě tehdy, když G nemá kružnice a $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

Tvrzení dokažte bez použití věty o ekvivalentních definicích stromu, resp., pokud potřebujete některou implikaci z této věty, tak ji celou reprodukujte.

Úloha 7: Ukažte, že pro každý strom s n vrcholy existuje pořadí vrcholů $\{v_1, \ldots, v_n\}$ takové, že pro každé $i > 1$ platí, že v_i má právě jednoho souseda v množině $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$.

Úloha 8: Mějme posloupnost čísel $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ takovou, že $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$. Dokažte, že $(d_1, \ldots, d_n)$ je skóre stromu.

Úloha 9: Dokažte, že pokud v konečném stromu existuje vrchol stupně k, tak potom strom má alespoň k listů.

Úloha 10: Mějme strom, který má $l > 0$ listů a v vnitřních vrcholů, přičemž každý vnitřní vrchol má stupeň 3. Dokažte, že vždy platí $l = v + 2$.

Úloha 11: Dokažte, že každý strom na n vrcholech má nezávislou množinu velikosti aspoň $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Úloha 12: V šachovnici $m \times m$ je $2m$ políček obarveno modře. Na jedno z políček umístíme věž. Věží budeme pohybovat z modrého políčka opět na modré políčko, přičemž se budeme chtít pohybovat střídavě vodorovně a svisle. Dokažte, že je možné věž umístit tak, že když s ní budeme vhodně pohybovat, nikdy nepřestaneme mít možnost udělat další tah.

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Dokažte, že každý eulerovský graf je disjunktním sjednocením kružnic.

Úloha 2: Charakterizujte všechny grafy, které mají (ne nutně uzavřený) eulerovský tah.

Úloha 3: Nalezněte algoritmus pro nalezení nejkratšího uzavřeného sledu, jež obsahuje všechny hrany daného grafu (sled je posloupnost navazujících hran, kde se hrany i vrcholy mohou opakovat). Pro jednoduchost předpokládejte, že graf má nejvýše 6 vrcholů lichého stupně.

Úloha 4: Dokažte: Orientovaný graf G má uzavřený eulerovský tah právě tehdy, když G je silně souvislý a vstupní stupeň každého vrcholu je roven jeho výstupnímu stupni.

Také dokažte silnější variantu tohoto tvrzení, kde silná souvislost je nahrazena slabou souvislostí.

(Silná souvislost znamená, že mezi každou dvojicí vrcholů u a v vede jak orientovaná cesta z u do v, tak orientovaná cesta z v do u. Slabá souvislost znamená, že mezi libovolnými dvěma vrcholy vede cesta jejíž hrany mohou být orientovány jak po, tak proti směru cesty.)

Úloha 5: Ukažte, že je-li graf G eulerovský, pak je jeho line graf též eulerovský.

Line graf $L(G)$ má za vrcholy hrany G a dva vrcholy v $L(G)$ reprezentující hrany e a f spolu sousedí právě když e a f mají společný vrchol.

Úloha 6: Dokažte: graf G je strom právě tehdy, když G nemá kružnice a $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

Tvrzení dokažte bez použití věty o ekvivalentních definicích stromu, resp., pokud potřebujete některou implikaci z této věty, tak ji celou reprodukujte.

Úloha 7: Ukažte, že pro každý strom s n vrcholy existuje pořadí vrcholů $\{v_1, \ldots, v_n\}$ takové, že pro každé $i > 1$ platí, že v_i má právě jednoho souseda v množině $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$.

Úloha 8: Mějme posloupnost čísel $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ takovou, že $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$. Dokažte, že $(d_1, \ldots, d_n)$ je skóre stromu.

Úloha 9: Dokažte, že pokud v konečném stromu existuje vrchol stupně k, tak potom strom má alespoň k listů.

Úloha 10: Mějme strom, který má $l > 0$ listů a v vnitřních vrcholů, přičemž každý vnitřní vrchol má stupeň 3. Dokažte, že vždy platí $l = v + 2$.

Úloha 11: Dokažte, že každý strom na n vrcholech má nezávislou množinu velikosti aspoň $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Úloha 12: V šachovnici $m \times m$ je $2m$ políček obarveno modře. Na jedno z políček umístíme věž. Věží budeme pohybovat z modrého políčka opět na modré políčko, přičemž se budeme chtít pohybovat střídavě vodorovně a svisle. Dokažte, že je možné věž umístit tak, že když s ní budeme vhodně pohybovat, nikdy nepřestaneme mít možnost udělat další tah.