Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Je pravda, že pro každé dvě množiny X a Y platí $2^X = 2^Y$, právě když $X = Y$?

Úloha 2: Ukažte, že pro zobrazení $f : X \to X$ na konečné množině X platí, že f je prosté právě když f je na.

Platí totéž i pro nekonečné množiny X?

Úloha 3: Nechť $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to X$ jsou funkce takové, že pro každé $x \in X$ platí $(g \circ f)(x) = x$ a pro každé $y \in Y$ platí, že $(f \circ g)(y) = y$. Dokažte, že f i g jsou bijekce (tedy prosté a na).

Úloha 4: Buď X konečná množina a R relace na X antisymetrická relace. Ukažte, že každá relace $\bar{R} \subset R$ je také antisymetrická.

Úloha 5: Najděte

a) bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$;

b) bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}^2$;

c) prosté zobrazení z $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{N}$. (Nebo dokonce zkonstruujte bijekci.)

Úloha 6: Uvažme relaci "x je dělitelem čísla y" na množině $\{1, \dots, n\}$.

a) Dokažte, že tato relace je (neostré) uspořádání.

b) Má toto uspořádání nějaký největší a nejmenší prvek?

c) Má toto uspořádání nějaký minimální a maximální prvek?

d) Čemu v tomto uspořádání odpovídá infimum a supremum neprázdné podmnožiny?

Úloha 7: Které z následujících relací na množině $\mathbb{N}^2$ (dvojice přirozených čísel) jsou uspořádáními? Která z těchto uspořádání jsou lineární?

a) Porovnání po obou souřadnicích $\leq_S$:

$(a,b) \leq_S (x,y) \Leftrightarrow a \leq x \wedge b \leq y$

b) Porovnání v alespoň jedné souřadnici $\leq_U$:

$(a,b) \leq_U (x,y) \Leftrightarrow a \leq x \vee b \leq y$

c) Porovnání v obou složkách různými směry $\leq_Z$:

$(a,b) \leq_Z (x,y) \Leftrightarrow a \leq x \wedge b \geq y$

d) Slovníkové (lexikografické) porovnání $\leq_L$:

$(a,b) \leq_L (x,y) \Leftrightarrow a < x \vee (a = x \wedge b \leq y)$

e) Slovníkovo-maximové porovnání $\leq_M$:

$(a,b) \leq_M (x,y) \Leftrightarrow \max(a,b) < \max(x,y) \vee (a,b) \leq_L (x,y)$

f) Maximové porovnání s tím, že nerozhodné případy se porovnají lexikograficky $\leq_N$:

$(a,b) \leq_N (x,y) \Leftrightarrow \max(a,b) < \max(x,y) \vee [\max(a,b) = \max(x,y) \wedge (a,b) \leq_L (x,y)]$

Úloha 8: U následujících variant rozhodněte, zda existuje uspořádání splňující danou podmínku. Pokud existuje, uveďte příklad.

a) — bez největšího prvku; na neprázdné konečné množině.

b) — bez největšího prvku a bez nejmenšího prvku; na neprázdné konečné množině.

c) — bez největšího prvku, ale s maximálním prvkem; na neprázdné konečné množině.

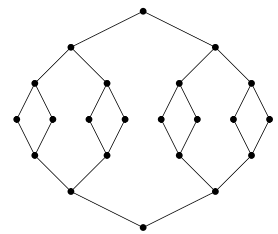
d) — bez největšího prvku a bez maximálního prvku; na neprázdné konečné množině.

e) — bez největšího prvku, ale s maximálním prvkem; na nekonečné množině.

f) — bez největšího a bez maximálního prvku; na nekonečné množině.

g) — bez nekonečného řetězce; na nekonečné množině.

Úloha 9: U uspořádání daného následujícím Hasseho diagramem vyznačte nějaký maximální řetězec a antiřetězec. U antiřetězce zdůvodněte, proč nelze najít delší.



Úloha 10: Nalezněte nejdelší řetězce a antiřetězce na uspořádáních: $(\{1, \dots, n\}, |)$ a $(\mathcal{P}(\{1, \dots, n\}), \subseteq)$.

Úloha 11:

a) Ukažte, že pro každou konečnou množinu platí, že všechna její lineární uspořádání jsou navzájem isomorfní.

Pozn.: Relace R na X je isomofní relaci S na Y pokud existuje bijekce $f : X \to Y$ taková, že $(x,y) \in R \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in S$.

b) Ukažte, že pro každou množinu A přirozených čísel platí, že všechna lineární uspořádání množiny A jsou navzájem isomorfní, právě když A je konečná.