Jméno:

1	2	3	4	$\sum$

Zkouška z Diskrétní matematiky — písemná čast (vzor)

- U početních příkladů je kromě konečného výsledku nutné uvést i správný postup řešení (všechny kroky pořádně zdůvodňujte).
- Číselné výsledky nemusíte upravovat. Například odpověď $2^3\binom{5}{2}$ je stejně dobrá jako odpověď 80.

1. Definujte symetrickou a tranzitivní relaci na množině X. Kolik je symetrických relací na n-prvkové množině? [5 bodů]

2. Popište Krushkalův (hladový) algoritmus. Dále uvažujte graf $G = (V, E)$, kde
$$V = \binom{[4]}{2} = \binom{\{1,2,3,4\}}{2}$$
a
$$E = \left\{ v_1 v_2 \in \binom{V}{2} : v_1 \cap v_2 \neq \emptyset \right\}.$$
Nakreslete tento graf a také v něm nalezněte nějakou minimální kostru, kdy váha hrany $e = v_1 v_2 \in \binom{V}{2}$ je taková hodnota $w(e)$, že $v_1 \cap v_2 = \{w(e)\}$ (tedy například váha hrany $\{1,2\}\{2,4\}$ je 2). [7 bodů]

3. Mějme graf $G = (V, E)$ a nechť A je matice sousednosti G. Nechť $B = A^2$ je její druhá mocnina. Dokažte, že součet prvků na hlavní diagonále matice B je roven $2|E|$. Tedy ukažte, že
$$\sum_{i=1}^{n} b_{ii} = 2|E|, \qquad \text{pokud} \qquad B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n}.$$
Můžete využívat tvrzení dokázaná na přednášce. (Pokud příklad neumíte vyřešit, definujte alespoň matici sousednosti.) [9 bodů]

4. Formulujte a dokažte Eulerův vzorec pro rovinné grafy. [9 bodů]