Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Určete minimální a maximální počet hran v grafu na n vrcholech s c komponentami.

Úloha 2: Dokažte, že každý souvislý graf na $n \geq 3$ vrcholech obsahuje dva vrcholy u a v takové, že všechny tři grafy $G \setminus \{u\}$, $G \setminus \{v\}$ a $G \setminus \{u, v\}$ jsou souvislé.

Úloha 3: Ukažte, že doplněk grafu G je nesouvislý, právě když G obsahuje úplný bipartitní graf jako podgraf na všech vrcholech.

Úloha 4: Dokažte: graf G je strom právě tehdy, když G nemá kružnice a $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

Tvrzení dokažte bez použití věty o ekvivalentních definicích stromu, resp., pokud potřebujete některou implikaci z této věty, tak ji celou reprodukujte.

Úloha 5: Ukažte, že pro každý strom s n vrcholy existuje pořadí vrcholů $\{v_1, \ldots, v_n\}$ takové, že pro každé $i > 1$ platí, že v_i má právě jednoho souseda v množině $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$.

Úloha 6: Mějme posloupnost čísel $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ takovou, že $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$. Dokažte, že $(d_1, \ldots, d_n)$ je skóre stromu.

Úloha 7: Dokažte, že pokud v konečném stromu existuje vrchol stupně k, tak potom strom má alespoň k listů.

Úloha 8: Mějme strom, který má $l > 0$ listů a v vnitřních vrcholů, přičemž každý vnitřní vrchol má stupeň 3. Dokažte, že vždy platí $l = v + 2$.

Úloha 9: Dokažte, že každý strom na n vrcholech má nezávislou množinu velikosti aspoň $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Úloha 10: Ukažte, že každá kostra obsahuje všechny mosty, t.j. hrany, jejichž odebráním se stane graf nesouvislý.

Úloha 11: Spočtěte kolik má různých koster cyklus na n vrcholech.

Kolik jich má činka, t.j. dva cykly délek m a n spojené cestou délky l.

Kolik koster má tzv Θ-graf, tedy dva vrcholy stupně tři spojené cestami délek m, n a l.