Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Ověřte, jestli následující posloupnost je skóre grafu, a pokud ano, sestrojte nějaký takový.

a) $(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5)$

b) $(1, 2, 3, 4, 5, 5, 6)$

Úloha 2: Najděte příklad dvou grafů (dvou stromů, stromu a grafu, co není strom) se stejným skóre.

Úloha 3: Dokažte, že graf se všemi stupni sudými neobsahuje most, tedy hranu, jejímž odebráním se zvýší počet komponent.

Úloha 4: Ukažte, že pokud má $2k$-regulární graf sudý počet hran, tak buď k nebo $|V_G|$ je sudé.

Úloha 5: Pro každá dvě přirozená čísla k, n taková, že $k < n$ a $2|kn$, najděte příklad k-regulárního grafu na n vrcholech.

Úloha 6: Dokažte, že každý eulerovský graf je disjunktním sjednocením kružnic.

Úloha 7: Charakterizujte všechny grafy, které mají (ne nutně uzavřený) eulerovský tah.

Úloha 8: Má-li $2k$-regulární graf sudý počet hran v každé komponentě, potom má dva hranově disjunktní k-faktory. Dokažte.

(Definice: k-regulární graf má všechny vrcholy stupně k; faktor je podgraf se stejnou množinou vrcholů; k-faktor je k-regulární faktor).

Úloha 9: Dokažte: Orientovaný graf G má uzavřený eulerovský tah právě tehdy, když G je silně souvislý a vstupní stupeň každého vrcholu je roven jeho výstupnímu stupni.

Také dokažte silnější variantu tohoto tvrzení, kde silná souvislost je nahrazena slabou souvislostí.

(Silná souvislost znamená, že mezi každou dvojicí vrcholů u a v vede jak orientovaná cesta z u do v, tak orientovaná cesta z v do u. Slabá souvislost znamená, že mezi libovolnými dvěma vrcholy vede cesta jejíž hrany mohou být orientovány jak po, tak proti směru cesty.)

Úloha 10: Ukažte, že je-li graf G eulerovský, pak je jeho line graf též eulerovský.

Line graf $L(G)$ má za vrcholy hrany G a dva vrcholy v $L(G)$ reprezentující hrany e a f spolu sousedí právě když e a f mají společný vrchol.

Úloha 11: Nechť G je graf a $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ je jeho matice sousednosti. V závislosti na počtu vrcholů a hran určete součet všech prvků A, tj. výraz

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}.$$

Úloha 12: Nechť G je graf bez trojúhelníků a A jeho matice sousednosti. Jaké prvky má na hlavní diagonále A^3, tj. třetí mocnina A?

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Ověřte, jestli následující posloupnost je skóre grafu, a pokud ano, sestrojte nějaký takový.

a) $(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5)$

b) $(1, 2, 3, 4, 5, 5, 6)$

Úloha 2: Najděte příklad dvou grafů (dvou stromů, stromu a grafu, co není strom) se stejným skóre.

Úloha 3: Dokažte, že graf se všemi stupni sudými neobsahuje most, tedy hranu, jejímž odebráním se zvýší počet komponent.

Úloha 4: Ukažte, že pokud má $2k$-regulární graf sudý počet hran, tak buď k nebo $|V_G|$ je sudé.

Úloha 5: Pro každá dvě přirozená čísla k, n taková, že $k < n$ a $2|kn$, najděte příklad k-regulárního grafu na n vrcholech.

Úloha 6: Dokažte, že každý eulerovský graf je disjunktním sjednocením kružnic.

Úloha 7: Charakterizujte všechny grafy, které mají (ne nutně uzavřený) eulerovský tah.

Úloha 8: Má-li $2k$-regulární graf sudý počet hran v každé komponentě, potom má dva hranově disjunktní k-faktory. Dokažte.

(Definice: k-regulární graf má všechny vrcholy stupně k; faktor je podgraf se stejnou množinou vrcholů; k-faktor je k-regulární faktor).

Úloha 9: Dokažte: Orientovaný graf G má uzavřený eulerovský tah právě tehdy, když G je silně souvislý a vstupní stupeň každého vrcholu je roven jeho výstupnímu stupni.

Také dokažte silnější variantu tohoto tvrzení, kde silná souvislost je nahrazena slabou souvislostí.

(Silná souvislost znamená, že mezi každou dvojicí vrcholů u a v vede jak orientovaná cesta z u do v, tak orientovaná cesta z v do u. Slabá souvislost znamená, že mezi libovolnými dvěma vrcholy vede cesta jejíž hrany mohou být orientovány jak po, tak proti směru cesty.)

Úloha 10: Ukažte, že je-li graf G eulerovský, pak je jeho line graf též eulerovský.

Line graf $L(G)$ má za vrcholy hrany G a dva vrcholy v $L(G)$ reprezentující hrany e a f spolu sousedí právě když e a f mají společný vrchol.

Úloha 11: Nechť G je graf a $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ je jeho matice sousednosti. V závislosti na počtu vrcholů a hran určete součet všech prvků A, tj. výraz

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}.$$

Úloha 12: Nechť G je graf bez trojúhelníků a A jeho matice sousednosti. Jaké prvky má na hlavní diagonále A^3, tj. třetí mocnina A?