

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Jakou nejvyšší mocninou 5 je dělitelné $50!$? Určete obecný vzorec pro prvočíslo p a faktoriál čísla n .

Úloha 2: Ukažte, že $(k!)^n$ dělí $(kn)!$.

Úloha 3: Dokažte výpočtem i kombinatorickou úvahou:

a)
$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

b)
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

c)
$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

d)
$$\binom{n}{m} \binom{m}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{m-r}$$

e)
$$\sum_{k=0}^r \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}$$

f)
$$\sum_{k=r}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

Úloha 4: Sečtěte:

a)
$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$$

b)
$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$$

c)
$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2k}$$

d)
$$\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \binom{4n}{2k+1}$$

Úloha 5: Určete počet

a) uspořádaných dvojic (A, B) , kde $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$.

b) uspořádaných čtveřic (A, B, C, D) , kde $A \subseteq B \subseteq D \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ a také $A \subseteq C \subseteq D$.

Úloha 6: Kolika způsoby lze rozestavit černého a bílého krále na šachovnici tak, aby se navzájem neohrožovali? (T.j. nestáli na sousedních políčkách.)

Úloha 7: Z n předmětů vybíráme k . Do následující tabulky doplňte počty možných výběrů:

Výběry	Záleží na pořadí (variacie)	Nezáleží na pořadí (kombinace)
bez opakování		
s opakováním		

Úloha 8: Rozmísťujeme k kuliček do n přihrádek. Do následující tabulky doplňte počty možných výběrů:

Kuličky jsou	V každé přihrádce je		
	nejvýše jedna	libovolně mnoho	alespoň jedna
různobarevné			
stejnobarevné			

Úloha 9: Kolika způsoby lze rozestavit postavičky m vodníků a n čarodějnic tak, že žádní dva vodníci nestojí vedle sebe, když je navíc dáno:

- $m = 5, n = 7$, postavy stavíme do řady, vodníci jsou navzájem nerozeznatelní, a stejně tak i čarodějnice.
- $m = 5, n = 7$, postavy stavíme do řady, ale všechny jsou navzájem rozeznatelné.
- $m = 5, n = 7$, vodníci, resp. čarodějnice jsou navzájem nerozeznatelní, ale stavíme je do kruhu.
- $m = 5, n = 10$, vodníci, resp. čarodějnice jsou navzájem nerozeznatelní, ale stavíme je do kruhu.
- $m = 6, n = 12$, vodníci, resp. čarodějnice jsou navzájem nerozeznatelní, ale stavíme je do kruhu.

Úloha 10: Barevná inkoustová tiskárna dokáže umístit až 8 kapek na jeden bod. Kapka může mít azurovou (C-Cyan), fialovou (M-Magenta), žlutou (Y-Yellow) nebo černou (K-black) barvu. Kolik různých barevných odstínů lze dosáhnout v jednom bodě, předpokládáme-li, že smíšení tří různobarevných (CMY) kapek má stejný efekt, jako dvě černé? (Např. odstín $3C+2Y+M+K$ je stejný jako $2C+Y+3K$.)

Úloha 11: Kolik slov lze sestavit z písmen slova MISSISSIPPI?

Úloha 12: Kolik existuje různých rozdělení pravidelného n -úhelníku na vrcholech $1, \dots, n$ na trojúhelníky, tak že řezy vedou podél tětív, které se vzájemně nekříží a navíc každý trojúhelník má alespoň jednu stranu společnou s n -úhelníkem?.

Např. pětiúhelník lze rozdělit na tři trojúhelníky $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 5)$ a $(3, 4, 5)$.

(Rozdělení na trojúhelníky se nazývá triangulace, i když obecně není požadováno, aby každý trojúhelník měl stranu společnou s původním mnohoúhelníkem.)

Úloha 13: Kolik je v konvexním n -úhelníku dvojic tětív, jež se navzájem protínají uvnitř n -úhelníku, tedy nikoli v krajních bodech?