# Úlohy ke cvičení

*Úloha 1:* Jakou nejvyšší mocninou 5 je dělitelné 50! ? Určete obecný vzorec pro prvočíslo $p$ a faktoriál čísla $n$.

*Úloha 2:* Ukažte, že $(k!)^n$ dělí $(kn)!$.

*Úloha 3:* Dokažte výpočtem i kombinatorickou úvahou:

a) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

d) $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$

e) $\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}$

f) $\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$

*Úloha 4:* Sečtěte:

a) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$

b) $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$

c) $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k\binom{4n}{2k}$

d) $\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k\binom{4n}{2k+1}$

*Úloha 5:* Určete počet

a) uspořádaných dvojic $(A, B)$, kde $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$.

b) uspořádaných čtveřic $(A, B, C, D)$, kde $A \subseteq B \subseteq D \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ a také $A \subseteq C \subseteq D$.

*Úloha 6:* Kolika způsoby lze rozestavit černého a bílého krále na šachovnici tak, aby se navzájem neohrožovali? (T.j. nestáli na sousedních políčkách.)

*Úloha 7:* Z $n$ předmětů vybíráme $k$. Do následující tabulky doplňte počty možných výběrů:

| Výběry | Záleží na pořadí (variace) | Nezáleží na pořadí (kombinace) |
|---|---|---|
| bez opakování | | |
| s opakováním | | |

*Úloha 8:* Rozmísťujeme $k$ kuliček do $n$ přihrádek. Do následující tabulky doplňte počty možných výběrů:

| Kuličky jsou | V každé přihrádce je nejvýše jedna | libovolně mnoho | alespoň jedna |
|---|---|---|---|
| různobarevné | | | |
| stejnobarevné | | | |

*Úloha 9:* Kolika způsoby lze rozestavit postavičky $m$ vodníků a $n$ čarodějnic tak, že žádní dva vodníci nestojí vedle sebe, když je navíc dáno:

a) $m = 5, n = 7$, postavy stavíme do řady, vodníci jsou navzájem nerozeznatelní, a stejně tak i čarodějnice.

b) $m = 5, n = 7$, postavy stavíme do řady, ale všechny jsou navzájem rozeznatelné.

c) $m = 5, n = 7$, vodníci, resp. čarodějnice jsou navzájem nerozeznatelní, ale stavíme je do kruhu.

d) $m = 5, n = 10$, vodníci, resp. čarodějnice jsou navzájem nerozeznatelní, ale stavíme je do kruhu.

e) $m = 6, n = 12$, vodníci, resp. čarodějnice jsou navzájem nerozeznatelní, ale stavíme je do kruhu.

*Úloha 10:* Barevná inkoustová tiskárna dokáže umístit až 8 kapek na jeden bod. Kapka může mít azurovou (C-Cyan), fialovou (M-Magenta), žlutou (Y-Yellow) nebo černou (K-blacK) barvu. Kolik různých barevných odstínů lze dosáhnout v jednom bodě, předpokládame-li, že smíšení tří různobarevných (CMY) kapek má stejný efekt, jako dvě černé? (Např. odstín 3C+2Y+M+K je stejný jako 2C+Y+3K.)

*Úloha 11:* Kolik slov lze sestavit z písmen slova MISSISSIPPI?

*Úloha 12:* Kolik existuje různých rozdělení pravidelného $n$-úhelníku na vrcholech $1, \ldots, n$ na trojúhelníky, tak že řezy vedou podél tětiv, které se vzájemně nekříží a navíc každý trojúhelník má alespoň jednu stranu společnou s $n$-úhelníkem?.

Např. pětiúhelník lze rozdělit na tři trojúhleníky $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 5)$ a $(3, 4, 5)$.

(Rozdělení na trojúhelníky se nazývá triangulace, i když obecně není požadováno, aby každý trojúhelník měl stranu společnou s původním mnohoúhelníkem.)

*Úloha 13:* Kolik je v konvexním $n$-úhelníku dvojic tětiv, jež se navzájem protínají uvnitř n-úhelníku, tedy nikoli v krajních bodech?