Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Rozhodněte, které z následujících relací jsou reflexivní, symetrické, tranzitivní a antisymetrické.

a) $X = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a), (c, c)\}$

b) $X = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (c, c)\}$

c) $(X, R) = (\mathbb{N}, \leq)$,

d) $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$, $R = \{(x, y) : nsd(x, y) = 1\}$, neboli x a y jsou nesoudělné.

Úloha 2: Buďte R a S reflexivní relace na téže množině. Které z následujících relací jsou také reflexivní?

a) $R \cup S$

b) $R \cap S$

c) $R \setminus S$

d) $R \,\Delta\, S$

e) $R \circ S$

f) R^{-1}

Úloha 3: Buďte R a S tranzitivní relace na téže množině. Které z následujících relací jsou také tranzitivní?

a) $R \cup S$

b) $R \cap S$

c) $R \setminus S$

d) $R \,\Delta\, S$

e) $R \circ S$

f) R^{-1}

Úloha 4: Buďte R a S symetrické relace na téže množině. Které z následujících relací jsou také symetrické?

a) $R \cup S$

b) $R \cap S$

c) $R \setminus S$

d) $R \,\Delta\, S$

e) $R \circ S$

f) R^{-1}

Úloha 5: Určete počet relací na čtyřech (n) prvcích:
— všech,
— reflexivních,
— symetrických,
— antisymetrických.

Úloha 6: Rozhodněte, zda jsou ekvivalence následující relace a pokud ano, určete třídy ekvivalence:

a) $X_1 = \mathbb{N}, xR_1y \Leftrightarrow p|(x - y)$ (zbytkové třídy modulo $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$)

b) $X_2 = \mathbb{Z} \setminus 0, xR_2y \Leftrightarrow x|y \wedge y|x$

c) $X_3 = \mathbb{N}, xR_3y \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{N} : z|y \wedge z|x$.

Co se stane, budeme-li požadovat $z > 1$?

Úloha 7: Určete počet různých ekvivalencí na pěti prvcích.

Úloha 8: U následujících variant rozhodněte, zda existuje uspořádání splňující danou podmínku. Pokud existuje, uveďte příklad.

a) bez největšího prvku, ale s maximálním prvkem; na neprázdné konečné množině.

b) bez největšího prvku a bez nejmenšího prvku; na neprázdné konečné množině.

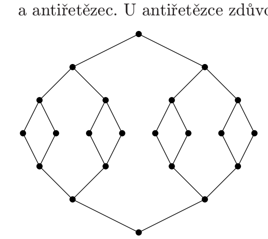
c) bez největšího prvku a bez maximálního prvku; na neprázdné konečné množině.

d) bez největšího prvku, ale s maximálním prvkem; na nekonečné množině.

e) bez největšího a bez maximálního prvku; na nekonečné množině.

f) bez nekonečného řetězce; na nekonečné množině.

Úloha 9: U uspořádání daného následujícím Hasseho diagramem vyznačte nějaký nejdelší řetězec a antiřetězec. U antiřetězce zdůvodněte, proč nelze najít delší.



Úloha 10: Nalezněte nejdelší řetězce a antiřetězce na uspořádáních:
$(\{1, \ldots, n\}, |)$ a $(\mathcal{P}(\{1, \ldots, n\}), \subseteq)$.

Úloha 11: Které z následujících relací na množině $\mathbb{N}^2$ (dvojice přirozených čísel) jsou uspořádáními? Která z těchto uspořádání jsou lineární?

a) Porovnání po obou souřadnicích $\leq_S$:

$(a, b) \leq_S (x, y) \Leftrightarrow a \leq x \wedge b \leq y$

b) Porovnání v alespoň jedné souřadnici $\leq_U$:

$(a, b) \leq_U (x, y) \Leftrightarrow a \leq x \vee b \leq y$

c) Porovnání v obou složkách různými směry $\leq_Z$:

$(a, b) \leq_Z (x, y) \Leftrightarrow a \leq x \wedge b \geq y$

d) Slovníkové (lexikografické) porovnání $\leq_L$:

$(a, b) \leq_L (x, y) \Leftrightarrow a < x \vee (a = x \wedge b \leq y)$