Diskrétní matematika - Informace o online výuce

- K přednášce budu pravidelně udržovat webovou stránku. Snadno se k ní dá doklikat z `kam.mff.cuni.cz/~tancer`

Diskrétní matematika - Informace o online výuce

- K přednášce budu pravidelně udržovat webovou stránku. Snadno se k ní dá doklikat z `kam.mff.cuni.cz/~tancer`
- Budete-li cokoliv potřebovat, kontaktujte mne emailem `tancer@kam.mff.cuni.cz` (k nalezení na stránce)

Diskrétní matematika - Informace o online výuce

- K přednášce budu pravidelně udržovat webovou stránku. Snadno se k ní dá doklikat z `kam.mff.cuni.cz/~tancer`
- Budete-li cokoliv potřebovat, kontaktujte mne emailem `tancer@kam.mff.cuni.cz` (k nalezení na stránce)
- Speciálně, napište, budete-li mít zájem o konzultace.

Diskrétní matematika - Informace o online výuce

- K přednášce budu pravidelně udržovat webovou stránku. Snadno se k ní dá doklikat z `kam.mff.cuni.cz/~tancer`
- Budete-li cokoliv potřebovat, kontaktujte mne emailem `tancer@kam.mff.cuni.cz` (k nalezení na stránce)
- Speciálně, napište, budete-li mít zájem o konzultace.
- Dejte také vědět, pokud máte technické potíže s připojením k přednášce, občas může pomoci, když změním nějaké nastavení v zoomu.

Diskrétní matematika - Informace o online výuce

- K přednášce budu pravidelně udržovat webovou stránku. Snadno se k ní dá doklikat z `kam.mff.cuni.cz/~tancer`
- Budete-li cokoliv potřebovat, kontaktujte mne emailem `tancer@kam.mff.cuni.cz` (k nalezení na stránce)
- Speciálně, napište, budete-li mít zájem o konzultace.
- Dejte také vědět, pokud máte technické potíže s připojením k přednášce, občas může pomoci, když změním nějaké nastavení v zoomu.
- Přednášky plánuju nahrávat. Pokud někdo nechce být nahraný, mějte vypnutou kameru a pokládejte dotazy přes chat.

Informace o online výuce, pokračování

- Během přednášky se **hodně ptejte**. Čas na to máme.

Informace o online výuce, pokračování

- Během přednášky se **hodně ptejte**. Čas na to máme.
- Když si nevšimnu dotazu na chatu, ocením, když mne někdo upozorní.

Informace o online výuce, pokračování

- Během přednášky se **hodně ptejte**. Čas na to máme.
- Když si nevšimnu dotazu na chatu, ocením, když mne někdo upozorní.
- Paralelně prbíhá přednáška Martina Mareše. Budeme se snažit být synchronní. Ale zkontrolujte si, kdo co od Vás chce u zkoušky, nějaké drobnosti se mohou lišit.

Informace o online výuce, pokračování

- Během přednášky se **hodně ptejte**. Čas na to máme.
- Když si nevšimnu dotazu na chatu, ocením, když mne někdo upozorní.
- Paralelně prbíhá přednáška Martina Mareše. Budeme se snažit být synchronní. Ale zkontrolujte si, kdo co od Vás chce u zkoušky, nějaké drobnosti se mohou lišit.
- Doporučená literatura: J. Matoušek, J. Nešetřil, Kapitoly z diskrétní matematiky

Diskrétní matematika - motivace

- Chceme porozumět diskrétním matematickým objektům. To jsou objekty bez nějaké spojité struktury. Obvykle definované pomocí konečných množin.

Diskrétní matematika - motivace

- Chceme porozumět diskrétním matematickým objektům. To jsou objekty bez nějaké spojité struktury. Obvykle definované pomocí konečných množin.

Hlavní části

- Kombinatorika
- Teorie grafů

Kombinatorika - motivace

- Zavedeme si nějaké základní kombinatorické pojmy. (Například částečná uspořádání.)

Kombinatorika - motivace

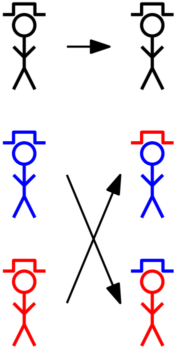
- Zavedeme si nějaké základní kombinatorické pojmy. (Například částečná uspořádání.)
- Budeme se věnovat kombinatorickému počítání. (Například problém šatnářky)

Kombinatorika - motivace

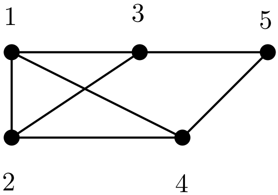
- Zavedeme si nějaké základní kombinatorické pojmy. (Například částečná uspořádání.)
- Budeme se věnovat kombinatorickému počítání. (Například problém šatnářky)

Příklad (Problém šatnářky)

Mějme n pánů, kteří si odloží svůj klobouk u roztržité šatnářky. Ta klobouky při vracení náhodně pomíchá. Jaká je pravděpodobnost, že žádný z pánů nedostane svůj klobouk.



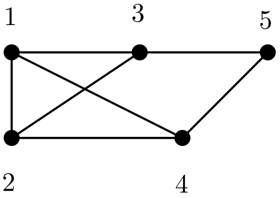
Teorie grafů - motivace



Vrcholy: 1, 2, 3, 4, 5

Hrany: 12, 13, 14, 23, 24, 35, 45

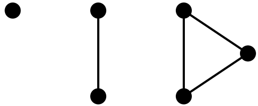
Teorie grafů - motivace



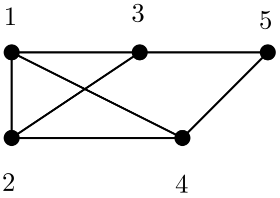
Vrcholy: 1, 2, 3, 4, 5

Hrany: 12, 13, 14, 23, 24, 35, 45

Kreslení grafů do roviny:



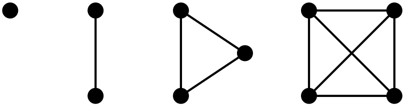
Teorie grafů - motivace



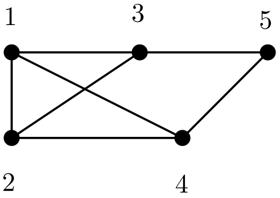
Vrcholy: 1, 2, 3, 4, 5

Hrany: 12, 13, 14, 23, 24, 35, 45

Kreslení grafů do roviny:



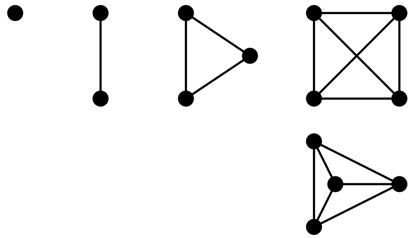
Teorie grafů - motivace



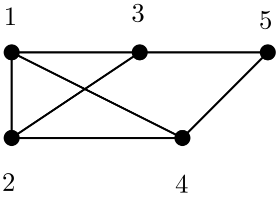
Vrcholy: 1, 2, 3, 4, 5

Hrany: 12, 13, 14, 23, 24, 35, 45

Kreslení grafů do roviny:



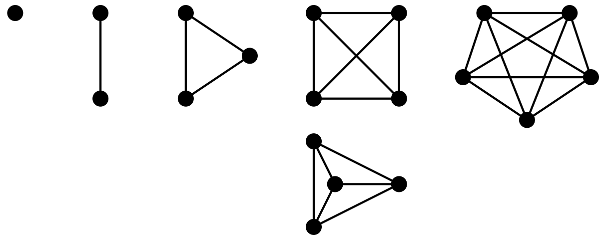
Teorie grafů - motivace



Vrcholy: 1, 2, 3, 4, 5

Hrany: 12, 13, 14, 23, 24, 35, 45

Kreslení grafů do roviny:



Základní pojmy a značení: čísla

Číselné obory:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots,\}$ přirozená čísla
- $\mathbb{Z}$ celá čísla
- $\mathbb{Q}$ racionální čísla
- $\mathbb{R}$ reálná čísla

Základní pojmy a značení: čísla

Číselné obory:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, \}$ přirozená čísla
- $\mathbb{Z}$ celá čísla
- $\mathbb{Q}$ racionální čísla
- $\mathbb{R}$ reálná čísla
- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Základní pojmy a značení: čísla

Číselné obory:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots,\}$ přirozená čísla
- $\mathbb{Z}$ celá čísla
- $\mathbb{Q}$ racionální čísla
- $\mathbb{R}$ reálná čísla
- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Horní a dolní celá část:

- Pro $x \in \mathbb{R}$ je $\lfloor x \rfloor$ dolní celá část čísla x, tj. největší celé číslo menší rovno x. $\lfloor 3 \rfloor = 3$; $\lfloor 1{,}4 \rfloor = 1$, $\lfloor -1{,}4 \rfloor = -2$

Základní pojmy a značení: čísla

Číselné obory:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, \}$ přirozená čísla
- $\mathbb{Z}$ celá čísla
- $\mathbb{Q}$ racionální čísla
- $\mathbb{R}$ reálná čísla
- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Horní a dolní celá část:

- Pro $x \in \mathbb{R}$ je $\lfloor x \rfloor$ dolní celá část čísla x, tj. největší celé číslo menší rovno x. $\lfloor 3 \rfloor = 3$; $\lfloor 1{,}4 \rfloor = 1$, $\lfloor -1{,}4 \rfloor = -2$
- Pro $x \in \mathbb{R}$ je $\lceil x \rceil$ horní celá část čísla x, tj. nejmenší celé číslo větší rovno x. $\lceil 3 \rceil = 3$; $\lceil 1{,}4 \rceil = 2$; $\lceil -1{,}4 \rceil = -1$.

Základní pojmy a značení: množiny

- Intuitivně: množina je soubor nějakých prvků

Základní pojmy a značení: množiny

- Intuitivně: množina je soubor nějakých prvků
- Prvek a množina jsou základní prvky, které nedefinujeme.

Základní pojmy a značení: množiny

- Intuitivně: množina je soubor nějakých prvků
- Prvek a množina jsou základní prvky, které nedefinujeme.
- Je potřeba opatrnosti při práce s nimi. Problémy:
  - Množina všech množin, které neobsahují samy sebe.
  - Množina všech množin.

Základní pojmy a značení: množiny

- Intuitivně: množina je soubor nějakých prvků
- Prvek a množina jsou základní prvky, které nedefinujeme.
- Je potřeba opatrnosti při práce s nimi. Problémy:
  - Množina všech množin, které neobsahují samy sebe.
  - Množina všech množin.
- Řešení: nejsou to množiny (podrobněji matematická logika)

Základní pojmy a značení: množiny

- Intuitivně: množina je soubor nějakých prvků
- Prvek a množina jsou základní prvky, které nedefinujeme.
- Je potřeba opatrnosti při práce s nimi. Problémy:
  - Množina všech množin, které neobsahují samy sebe.
  - Množina všech množin.
- Řešení: nejsou to množiny (podrobněji matematická logika)
- V běžných situacích problémy nenastanou:
- $\{1, 2, 3\pi\}$, $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{x \in \mathbb{Z} \colon \exists k \in \mathbb{Z}; x = 2k\}$,
  $\{x \in \mathbb{R} \colon x^2 + 3 \geq 7\}$

Základní pojmy a značení: množiny

- Intuitivně: množina je soubor nějakých prvků
- Prvek a množina jsou základní prvky, které nedefinujeme.
- Je potřeba opatrnosti při práce s nimi. Problémy:
    - Množina všech množin, které neobsahují samy sebe.
    - Množina všech množin.
- Řešení: nejsou to množiny (podrobněji matematická logika)
- V běžných situacích problémy nenastanou:
- $\{1, 2, 3\pi\}$, $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{x \in \mathbb{Z} \colon \exists k \in \mathbb{Z}; x = 2k\}$, $\{x \in \mathbb{R} \colon x^2 + 3 \geq 7\}$
- $A := \{1, 2, 3, \pi\}$, $B := \{1, 2, A\} = \{1, 2, \{1, 2, 3, \pi\}\}$.

Základní pojmy a značení: množiny

- Intuitivně: množina je soubor nějakých prvků
- Prvek a množina jsou základní prvky, které nedefinujeme.
- Je potřeba opatrnosti při práce s nimi. Problémy:
  - Množina všech množin, které neobsahují samy sebe.
  - Množina všech množin.
- Řešení: nejsou to množiny (podrobněji matematická logika)
- V běžných situacích problémy nenastanou:
- $\{1, 2, 3\pi\}$, $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{x \in \mathbb{Z} \colon \exists k \in \mathbb{Z}; x = 2k\}$, $\{x \in \mathbb{R} \colon x^2 + 3 \geq 7\}$
- $A := \{1, 2, 3, \pi\}$, $B := \{1, 2, A\} = \{1, 2, \{1, 2, 3, \pi\}\}$.
- Nejde ale $A := \{A\}$.

Základní pojmy a značení: množiny

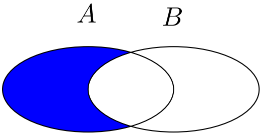
- Intuitivně: množina je soubor nějakých prvků
- Prvek a množina jsou základní prvky, které nedefinujeme.
- Je potřeba opatrnosti při práce s nimi. Problémy:
  - Množina všech množin, které neobsahují samy sebe.
  - Množina všech množin.
- Řešení: nejsou to množiny (podrobněji matematická logika)
- V běžných situacích problémy nenastanou:
- $\{1, 2, 3\pi\}$, $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{x \in \mathbb{Z} \colon \exists k \in \mathbb{Z}; x = 2k\}$, $\{x \in \mathbb{R} \colon x^2 + 3 \geq 7\}$
- $A := \{1, 2, 3, \pi\}$, $B := \{1, 2, A\} = \{1, 2, \{1, 2, 3, \pi\}\}$.
- Nejde ale $A := \{A\}$.
- Standardní značení: $[n] := \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Základní pojmy a značení: množinové operace

- Sjednocení $A \cup B$, průnik $A \cap B$ (předpokládám, že znáte).

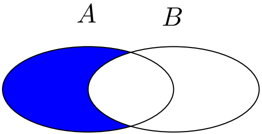
Základní pojmy a značení: množinové operace

- Sjednocení $A \cup B$, průnik $A \cap B$ (předpokládám, že znáte).
- Množinový rozdíl: $A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$.

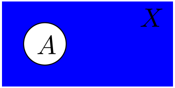


Základní pojmy a značení: množinové operace

- Sjednocení $A \cup B$, průnik $A \cap B$ (předpokládám, že znáte).
- Množinový rozdíl: $A \setminus B := \{x \in A \colon x \notin B\}$.

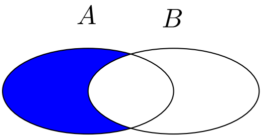


- Doplněk A v X: $A^c := \{x \in X : x \notin A\}$ pro $A \subseteq X$.

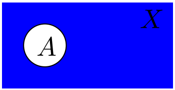


Základní pojmy a značení: množinové operace

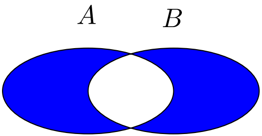
- Sjednocení $A \cup B$, průnik $A \cap B$ (předpokládám, že znáte).
- Množinový rozdíl: $A \setminus B := \{x \in A \colon x \notin B\}$.



- Doplněk A v X: $A^c := \{x \in X : x \notin A\}$ pro $A \subseteq X$.



- Symetrická diference:
  $A \triangle B := \{x \in A \cup B : X \notin A \cap B\} = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.



Základní pojmy a značení: množiny pokračování

- Velikost konečné množiny A, značená $|A|$ je pořet jejích prvků.

Základní pojmy a značení: množiny pokračování

- Velikost konečné množiny A, značená $|A|$ je pořet jejích prvků.
- Symbolem 2^A značíme množinu všech podmnožin množiny A. $2^{\{1,2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.
- Pozn.: $|2^A| = 2^{|A|}$ pro A konečnou. (Budeme mít podrobněji později.)

Základní pojmy a značení: množiny pokračování

- Velikost konečné množiny A, značená $|A|$ je pořet jejích prvků.
- Symbolem 2^A značíme množinu všech podmnožin množiny A. $2^{\{1,2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.
- Pozn.: $|2^A| = 2^{|A|}$ pro A konečnou. (Budeme mít podrobněji později.)

Distributivita:

- $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
- $X \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} Y_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n}(X \cap Y_i)$

Základní pojmy a značení: množiny pokračování

- Velikost konečné množiny A, značená $|A|$ je pořet jejích prvků.
- Symbolem 2^A značíme množinu všech podmnožin množiny A. $2^{\{1,2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.
- Pozn.: $|2^A| = 2^{|A|}$ pro A konečnou. (Budeme mít podrobněji později.)

Distributivita:

- $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
- $X \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} Y_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n}(X \cap Y_i)$
- $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
- $X \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} Y_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n}(X \cup Y_i)$

Základní pojmy a značení: množiny pokračování

- Velikost konečné množiny A, značená $|A|$ je pořet jejích prvků.
- Symbolem 2^A značíme množinu všech podmnožin množiny A. $2^{\{1,2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.
- Pozn.: $|2^A| = 2^{|A|}$ pro A konečnou. (Budeme mít podrobněji později.)

Distributivita:

- $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
- $X \cap \left(\bigcup_{i=1}^n Y_i\right) = \bigcup_{i=1}^n (X \cap Y_i)$
- $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
- $X \cup \left(\bigcap_{i=1}^n Y_i\right) = \bigcap_{i=1}^n (X \cup Y_i)$

De Morganovy vzorce:

- $X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n Y_i\right) = \bigcap_{i=1}^n (X \setminus Y_i)$
- $X \setminus \left(\bigcap_{i=1}^n Y_i\right) = \bigcup_{i=1}^n (X \setminus Y_i)$

Základní pojmy a značení: sumy a součiny

- $\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \sum_{i \in [5]} i^2$

Základní pojmy a značení: sumy a součiny

- $\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \sum_{i \in [5]} i^2$
- $\sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ prvočíslo}}}^{6} \sqrt{i} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$

Základní pojmy a značení: sumy a součiny

- $\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \sum_{i \in [5]} i^2$
- $\sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ prvočíslo}}}^{6} \sqrt{i} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$
- $\prod_{i=2}^{4} (1+i) = (1+2)(1+3)(1+4) = \prod_{i \in \{2,3,4\}} (1+i)$

Základní pojmy a značení: sumy a součiny

- $\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \sum_{i \in [5]} i^2$
- $\sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ prvočíslo}}}^{6} \sqrt{i} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$
- $\prod_{i=2}^{4} (1+i) = (1+2)(1+3)(1+4) = \prod_{i \in \{2,3,4\}} (1+i)$
- Prázdná suma je nulová: $\sum_{i=5}^{3} \sin(i) = 0$.
- Prázdný součin je roven 1: $\prod_{\substack{i \in \{1,3,5\} \\ i \text{ sudé}}} i = 1$.

Důkazy

- V matematice je potřeba rigorózní přístup.

Důkazy

- V matematice je potřeba rigorózní přístup.
- Často bývá těžší než něco spočítat, dokázat, že výpočet je korektní.

Důkazy

- V matematice je potřeba rigorózní přístup.
- Často bývá těžší než něco spočítat, dokázat, že výpočet je korektní.
- V přednášce budou důkazy.

Důkazy

- V matematice je potřeba rigorózní přístup.
- Často bývá těžší než něco spočítat, dokázat, že výpočet je korektní.
- V přednášce budou důkazy. Bude se očekávat, že je pochopíte a budete umět: Pochopit je důležitější než umět. Ale umět je má také výhodu, že se na tom dá dál stavět.

Matematická indukce - motivace

Příklad

Chceme určit hodnotu součtu

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Matematická indukce - motivace

Příklad

Chceme určit hodnotu součtu

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

- Můžeme spočítat několik počátečních hodnot:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}&=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}&=\frac{2}{3}\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{9}{12}&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

Matematická indukce - motivace

Příklad

Chceme určit hodnotu součtu

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

- Můžeme spočítat několik počátečních hodnot:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{6} = \frac{4}{6} &= \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12} = \frac{2}{3}+\frac{1}{12} = \frac{9}{12} &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

- Uhodneme, že výsledek by mohl být $\frac{n}{n+1}$. (Ještě to ale není důkaz.)

Důkaz matematickou indukcí:

- 1. indukční krok: Ověříme tvrzení pro $n = 1$. (V tomto případě OK.)
- 2. indukční krok: Ověříme, že pokud tvrzení platí pro všechna n menší rovna nějakému k, potom platí i pro $n = k + 1$ (indukční předpoklad).

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}}_{=\frac{k}{k+1}\text{(indukční předpoklad)}}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$

Důkaz matematickou indukcí:

- 1. indukční krok: Ověříme tvrzení pro $n = 1$. (V tomto případě OK.)
- 2. indukční krok: Ověříme, že pokud tvrzení platí pro všechna n menší rovna nějakému k, potom platí i pro $n = k + 1$ (indukční předpoklad).

$$\underbrace{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)}}_{=\frac{k}{k+1} \text{(indukční předpoklad)}} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} =$$

Důkaz matematickou indukcí:

- 1. indukční krok: Ověříme tvrzení pro $n = 1$. (V tomto případě OK.)
- 2. indukční krok: Ověříme, že pokud tvrzení platí pro všechna n menší rovna nějakému k, potom platí i pro $n = k + 1$ (indukční předpoklad).

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}}_{=\frac{k}{k+1}\text{(indukční předpoklad)}}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=$$

$$\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Indukce - poznámka

- Indukci je občas potřeba v 1. indukčním kroku začít na více počátečních hodnotách než jen na jedné, aby fungoval druhý indukční krok. Nějaké takové příklady budou na cvičeních.

Relace - motivace

Motivace: Mějme množiny X, Y a chceme obecně popsat situaci, kdy nějaké dvojice prvků z X a Y splňují nějaký vztah.

Relace - motivace

Motivace: Mějme množiny X, Y a chceme obecně popsat situaci, kdy nějaké dvojice prvků z X a Y splňují nějaký vztah.
Příklad: $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{2, 3, 4\}$ Vztah může být:

a) $x + y$ je sudé;
b) $x \geq y$;
c) $x \equiv y \pmod 3$.

Relace - motivace

Motivace: Mějme množiny X, Y a chceme obecně popsat situaci, kdy nějaké dvojice prvků z X a Y splňují nějaký vztah.
Příklad: $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{2, 3, 4\}$ Vztah může být:

a) $x + y$ je sudé;
b) $x \geq y$;
c) $x \equiv y \pmod 3$.

- Když máme konečné množiny, tak můžeme vypsat všechny takové dvojice. Např u (a) dostáváme: $(1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 3)$.

Relace - motivace

Motivace: Mějme množiny X, Y a chceme obecně popsat situaci, kdy nějaké dvojice prvků z X a Y splňují nějaký vztah.
Příklad: $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{2, 3, 4\}$ Vztah může být:

a. $x + y$ je sudé;
b. $x \geq y$;
c. $x \equiv y \pmod 3$.

- Když máme konečné množiny, tak můžeme vypsat všechny takové dvojice. Např u (a) dostáváme: $(1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 3)$.
- Obecně je ale užitečnější systematičtější popis.

Kartézský součin a definice relace

Definice

Kartézským součinem množin X a Y je množina

$$X \times Y := \{(x, y) \colon x \in X, y \in Y\}.$$

Kartézský součin a definice relace

Definice

Kartézským součinem množin X a Y je množina

$$X \times Y := \{(x, y) \colon x \in X, y \in Y\}.$$

Obecněji, kartézským součinem množin $X_1, \dots, X_n$ je množina

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n := \{(x_1, \dots, x_n) \colon x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n\}$$

Kartézský součin a definice relace

Definice

Kartézským součinem množin X a Y je množina

$$X \times Y := \{(x, y) \colon x \in X, y \in Y\}.$$

Obecněji, kartézským součinem množin $X_1, \dots, X_n$ je množina

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n := \{(x_1, \dots, x_n) \colon x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n\}$$

Definice

Jsou-li X a Y množiny, potom relací mezi X a Y rozumíme libovolnou podmnožinu R součinu $X \times Y$. Pro $x \in X$ a $y \in Y$ řekneme, že x a y jsou v relaci R, pokud $(x, y) \in R$, zapisujeme též jako xRy. Je-li navíc $X = Y$, potom se R nazývá relací na X.

Znázorňování relací

Definice

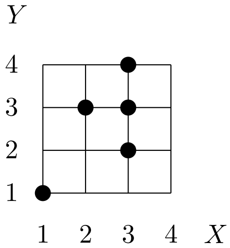
Jsou-li X a Y množiny, potom relací mezi X a Y rozumíme libovolnou podmnožinu R součinu $X \times Y$. Pro $x \in X$ a $y \in Y$ řekneme, že x a y jsou v relaci R, pokud $(x, y) \in R$, zapisujeme též jako xRy. Je-li navíc $X = Y$, potom se R nazývá relací na X.

Znázorňování relací

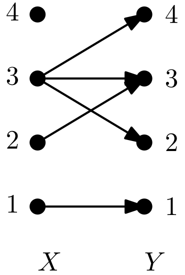
Definice

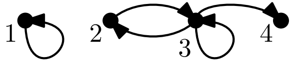
Jsou-li X a Y množiny, potom **relací mezi X a Y** rozumíme libovolnou podmnožinu R součinu $X \times Y$. Pro $x \in X$ a $y \in Y$ řekneme, že x a y jsou v relaci R, pokud $(x, y) \in R$, zapisujeme též jako xRy. Je-li navíc $X = Y$, potom se R nazývá relací na X.

$X = Y = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$





Relace ekvivalence

Definice

Řekneme, že relace R na X je

a. reflexivní, pokud pro každé $x \in X$ platí xRx;
b. symetrická, pokud pro každé $x, y \in X$ platí $xRy \Rightarrow yRx$;
c. tranzitivní, pokud pro každé $x, y, z \in X$ platí nastane-li xRy a yRz, potom i xRz.

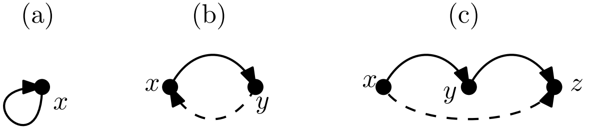
(a) (b) (c)

Relace ekvivalence

Definice

Řekneme, že relace R na X je

a) reflexivní, pokud pro každé $x \in X$ platí xRx;
b) symetrická, pokud pro každé $x, y \in X$ platí $xRy \Rightarrow yRx$;
c) tranzitivní, pokud pro každé $x, y, z \in X$ platí nastane-li xRy a yRz, potom i xRz.



Definice

Relace R na množině X je ekvivalence, je-li symetrická, reflexivní a tranzitivní.

Relace ekvivalence

Definice

Řekneme, že relace R na X je

a) reflexivní, pokud pro každé $x \in X$ platí xRx;
b) symetrická, pokud pro každé $x, y \in X$ platí $xRy \Rightarrow yRx$;
c) tranzitivní, pokud pro každé $x, y, z \in X$ platí nastane-li xRy a yRz, potom i xRz.

Definice

Relace R na množině X je ekvivalence, je-li symetrická, reflexivní a tranzitivní.

Relace ekvivalence

Definice

Řekneme, že relace R na X je

(a) reflexivní, pokud pro každé $x \in X$ platí xRx;

(b) symetrická, pokud pro každé $x, y \in X$ platí $xRy \Rightarrow yRx$;

(c) tranzitivní, pokud pro každé $x, y, z \in X$ platí nastane-li xRy a yRz, potom i xRz.

Definice

Relace R na množině X je ekvivalence, je-li symetrická, reflexivní a tranzitivní.

- Vyjadřuje podobnost, stejnost

Relace ekvivalence

Definice

Řekneme, že relace R na X je

a) reflexivní, pokud pro každé $x \in X$ platí xRx;
b) symetrická, pokud pro každé $x, y \in X$ platí $xRy \Rightarrow yRx$;
c) tranzitivní, pokud pro každé $x, y, z \in X$ platí nastane-li xRy a yRz, potom i xRz.

Definice

Relace R na množině X je ekvivalence, je-li symetrická, reflexivní a tranzitivní.

- Vyjadřuje podobnost, stejnost
- Příklady: $X = \mathbb{N}$, R je '$=$' nebo '$\equiv \pmod{n}$' nebo 'má stejný počet prvočísel ve svém rozkladu'

Relace ekvivalence

Definice

Řekneme, že relace R na X je

a) reflexivní, pokud pro každé $x \in X$ platí xRx;
b) symetrická, pokud pro každé $x, y \in X$ platí $xRy \Rightarrow yRx$;
c) tranzitivní, pokud pro každé $x, y, z \in X$ platí nastane-li xRy a yRz, potom i xRz.

Definice

Relace R na množině X je ekvivalence, je-li symetrická, reflexivní a tranzitivní.

- Vyjadřuje podobnost, stejnost
- Příklady: $X = \mathbb{N}$, R je '$=$' nebo '$\equiv \pmod{n}$' nebo 'má stejný počet prvočísel ve svém rozkladu'
- $X = \mathbb{R}$, R obsauje (x, y), že $x - y \in \mathbb{Z}$ či $x - y \in \mathbb{Q}$.

Třídy ekvivalence

Definice

Nechť R je ekvivalence na množině X. Nechť $x \in X$. Potom třída ekvivalence prvku x je definovaná jako

$$R[x] := \{y \in X : xRy\}.$$

Třídy ekvivalence

Definice

Nechť R je ekvivalence na množině X. Nechť $x \in X$. Potom třída ekvivalence prvku x je definovaná jako

$$R[x] := \{y \in X : xRy\}.$$

Věta (O rozkladu na třídy ekvivalence)

Nechť R je ekvivalence na množině X. Potom platí:

1. $R[x] \neq \emptyset$ *pro každé* $x \in X$.

Třídy ekvivalence

Definice

Nechť R je ekvivalence na množině X. Nechť $x \in X$. Potom třída ekvivalence prvku x je definovaná jako

$$R[x] := \{y \in X : xRy\}.$$

Věta (O rozkladu na třídy ekvivalence)

Nechť R je ekvivalence na množině X. Potom platí:

(i) $R[x] \neq \emptyset$ *pro každé* $x \in X$.

(ii) *Pro každé dva prvky* $x, y \in X$ *platí*
- $R[x] = R[y]$, *pokud* xRy,
- $R[x] \cap R[y] = \emptyset$, *pokud neplatí* xRy.

Třídy ekvivalence

Definice

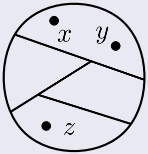
Nechť R je ekvivalence na množině X. Nechť $x \in X$. Potom třída ekvivalence prvku x je definovaná jako

$$R[x] := \{y \in X : xRy\}.$$

Věta (O rozkladu na třídy ekvivalence)

Nechť R je ekvivalence na množině X. Potom platí:

1. $R[x] \neq \emptyset$ *pro každé* $x \in X$.
2. *Pro každé dva prvky* $x, y \in X$ *platí*
   - $R[x] = R[y]$, *pokud* xRy,
   - $R[x] \cap R[y] = \emptyset$, *pokud neplatí* xRy.
3. *Třídy ekvivalence jednoznačně určují* R.



Důkaz věty o rozkladu

1. $R[x] \neq \emptyset$ pro každé $x \in X$. $\qquad y \in R[x] \Leftrightarrow xRy$
2. Pro každé dva prvky $x, y \in X$ platí
   - $R[x] = R[y]$, pokud xRy,
   - $R[x] \cap R[y] = \emptyset$, pokud neplatí xRy.
3. Třídy ekvivalence jednoznačně určují R.

Důkaz věty o rozkladu

1. $R[x] \neq \emptyset$ pro každé $x \in X$. $\qquad y \in R[x] \Leftrightarrow xRy$
2. Pro každé dva prvky $x, y \in X$ platí
   - $R[x] = R[y]$, pokud xRy,
   - $R[x] \cap R[y] = \emptyset$, pokud neplatí xRy.
3. Třídy ekvivalence jednoznačně určují R.

Důkaz.

1. $x \in R[x]$ protože xRx podle reflexivity.

Důkaz věty o rozkladu

1. $R[x] \neq \emptyset$ pro každé $x \in X$. $\quad y \in R[x] \Leftrightarrow xRy$
2. Pro každé dva prvky $x, y \in X$ platí
   - $R[x] = R[y]$, pokud xRy,
   - $R[x] \cap R[y] = \emptyset$, pokud neplatí xRy.
3. Třídy ekvivalence jednoznačně určují R.

Důkaz.

1. $x \in R[x]$ protože xRx podle reflexivity.
2. - Pokud xRy, uvažujme $z \in R[x]$, tedy xRz.

Důkaz věty o rozkladu

$y \in R[x] \Leftrightarrow xRy$

1. $R[x] \neq \emptyset$ pro každé $x \in X$.
2. Pro každé dva prvky $x, y \in X$ platí
   - $R[x] = R[y]$, pokud xRy,
   - $R[x] \cap R[y] = \emptyset$, pokud neplatí xRy.
3. Třídy ekvivalence jednoznačně určují R.

Důkaz.

1. $x \in R[x]$ protože xRx podle reflexivity.
2. - Pokud xRy, uvažujme $z \in R[x]$, tedy xRz.
     - Symetrie: zRx

Důkaz věty o rozkladu

(i) $R[x] \neq \emptyset$ pro každé $x \in X$. $\quad y \in R[x] \Leftrightarrow xRy$

(ii) Pro každé dva prvky $x, y \in X$ platí
- $R[x] = R[y]$, pokud xRy,
- $R[x] \cap R[y] = \emptyset$, pokud neplatí xRy.

(iii) Třídy ekvivalence jednoznačně určují R.

Důkaz.

(i) $x \in R[x]$ protože xRx podle reflexivity.

(ii)
- Pokud xRy, uvažujme $z \in R[x]$, tedy xRz.
  - Symetrie: zRx
  - Tranizitivita: zRx a xRy implikují zRy

Důkaz věty o rozkladu

(i) $R[x] \neq \emptyset$ pro každé $x \in X$. $\quad y \in R[x] \Leftrightarrow xRy$

(ii) Pro každé dva prvky $x, y \in X$ platí
- $R[x] = R[y]$, pokud xRy,
- $R[x] \cap R[y] = \emptyset$, pokud neplatí xRy.

(iii) Třídy ekvivalence jednoznačně určují R.

Důkaz.

(i) $x \in R[x]$ protože xRx podle reflexivity.

(ii)
- Pokud xRy, uvažujme $z \in R[x]$, tedy xRz.
  - Symetrie: zRx
  - Tranizitivita: zRx a xRy implikují zRy
  - Symetrie: yRz, tj. $z \in R[y]$

Důkaz věty o rozkladu

$y \in R[x] \Leftrightarrow xRy$

1. $R[x] \neq \emptyset$ pro každé $x \in X$.
2. Pro každé dva prvky $x, y \in X$ platí
   - $R[x] = R[y]$, pokud xRy,
   - $R[x] \cap R[y] = \emptyset$, pokud neplatí xRy.
3. Třídy ekvivalence jednoznačně určují R.

Důkaz.

1. $x \in R[x]$ protože xRx podle reflexivity.
2.
   - Pokud xRy, uvažujme $z \in R[x]$, tedy xRz.
     - Symetrie: zRx
     - Tranizitivita: zRx a xRy implikují zRy
     - Symetrie: yRz, tj. $z \in R[y]$
     - Dohromady $R[x] \subseteq R[y]$ a záměnou x a y dostaneme druhou inkluzi.

Důkaz věty o rozkladu

$y \in R[x] \Leftrightarrow xRy$

1. $R[x] \neq \emptyset$ pro každé $x \in X$.
2. Pro každé dva prvky $x, y \in X$ platí
   - $R[x] = R[y]$, pokud xRy,
   - $R[x] \cap R[y] = \emptyset$, pokud neplatí xRy.
3. Třídy ekvivalence jednoznačně určují R.

Důkaz.

1. $x \in R[x]$ protože xRx podle reflexivity.
2. - Pokud xRy, uvažujme $z \in R[x]$, tedy xRz.
     - Symetrie: zRx
     - Tranizitivita: zRx a xRy implikují zRy
     - Symetrie: yRz, tj. $z \in R[y]$
     - Dohromady $R[x] \subseteq R[y]$ a záměnou x a y dostaneme druhou inkluzi.
   - Pokud neplatí xRy, pro spor $z \in R[x] \cap R[y]$. Máme:

Důkaz věty o rozkladu

1. $R[x] \neq \emptyset$ pro každé $x \in X$. $\qquad y \in R[x] \Leftrightarrow xRy$
2. Pro každé dva prvky $x, y \in X$ platí
   - $R[x] = R[y]$, pokud xRy,
   - $R[x] \cap R[y] = \emptyset$, pokud neplatí xRy.
3. Třídy ekvivalence jednoznačně určují R.

Důkaz.

1. $x \in R[x]$ protože xRx podle reflexivity.
2.
   - Pokud xRy, uvažujme $z \in R[x]$, tedy xRz.
     - Symetrie: zRx
     - Tranizitivita: zRx a xRy implikují zRy
     - Symetrie: yRz, tj. $z \in R[y]$
     - Dohromady $R[x] \subseteq R[y]$ a záměnou x a y dostaneme druhou inkluzi.
   - Pokud neplatí xRy, pro spor $z \in R[x] \cap R[y]$. Máme:
     - xRz, yRz

Důkaz věty o rozkladu

(i) $R[x] \neq \emptyset$ pro každé $x \in X$. $\qquad y \in R[x] \Leftrightarrow xRy$

(ii) Pro každé dva prvky $x, y \in X$ platí
- $R[x] = R[y]$, pokud xRy,
- $R[x] \cap R[y] = \emptyset$, pokud neplatí xRy.

(iii) Třídy ekvivalence jednoznačně určují R.

Důkaz.

(i) $x \in R[x]$ protože xRx podle reflexivity.

(ii)
- Pokud xRy, uvažujme $z \in R[x]$, tedy xRz.
  - Symetrie: zRx
  - Tranizitivita: zRx a xRy implikují zRy
  - Symetrie: yRz, tj. $z \in R[y]$
  - Dohromady $R[x] \subseteq R[y]$ a záměnou x a y dostaneme druhou inkluzi.
- Pokud neplatí xRy, pro spor $z \in R[x] \cap R[y]$. Máme:
  - xRz, yRz
  - xRz, zRy (symetrie)

Důkaz věty o rozkladu

$y \in R[x] \Leftrightarrow xRy$

1. (i) $R[x] \neq \emptyset$ pro každé $x \in X$.
2. (ii) Pro každé dva prvky $x, y \in X$ platí
   - $R[x] = R[y]$, pokud xRy,
   - $R[x] \cap R[y] = \emptyset$, pokud neplatí xRy.
3. (iii) Třídy ekvivalence jednoznačně určují R.

Důkaz.

1. (i) $x \in R[x]$ protože xRx podle reflexivity.
2. (ii)
   - Pokud xRy, uvažujme $z \in R[x]$, tedy xRz.
     - Symetrie: zRx
     - Tranzitivita: zRx a xRy implikují zRy
     - Symetrie: yRz, tj. $z \in R[y]$
     - Dohromady $R[x] \subseteq R[y]$ a záměnou x a y dostaneme druhou inkluzi.
   - Pokud neplatí xRy, pro spor $z \in R[x] \cap R[y]$. Máme:
     - xRz, yRz
     - xRz, zRy (symetrie)
     - xRy (tranzitivita), což dává spor.

Důkaz věty o rozkladu

$y \in R[x] \Leftrightarrow xRy$

1. $R[x] \neq \emptyset$ pro každé $x \in X$.
2. Pro každé dva prvky $x, y \in X$ platí
   - $R[x] = R[y]$, pokud xRy,
   - $R[x] \cap R[y] = \emptyset$, pokud neplatí xRy.
3. Třídy ekvivalence jednoznačně určují R.

Důkaz.

1. $x \in R[x]$ protože xRx podle reflexivity.
2. - Pokud xRy, uvažujme $z \in R[x]$, tedy xRz.
     - Symetrie: zRx
     - Tranizitivita: zRx a xRy implikují zRy
     - Symetrie: yRz, tj. $z \in R[y]$
     - Dohromady $R[x] \subseteq R[y]$ a záměnou x a y dostaneme druhou inkluzi.
   - Pokud neplatí xRy, pro spor $z \in R[x] \cap R[y]$. Máme:
     - xRz, yRz
     - xRz, zRy (symetrie)
     - xRy (tranzitivita), což dává spor.
3. Podle (ii), $xRy \Leftrightarrow R[x] = R[y]$. $\square$