

## Úlohy ke cvičení

*Úloha 1:* Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé:

a) *Pravděpodobnost, že při hodu dvaceti kostkami padnou na alespoň desíti kostkách alespoň čtyři oka, je jedna polovina.*

b) *Pravděpodobnost, že při hodu devatenácti kostkami padnou na alespoň desíti kostkách alespoň čtyři oka, je jedna polovina.*

Své rozhodnutí zdůvodněte. Lze určit výsledek bez výpočtu pravděpodobností?

*Úloha 2:* Krabice dřevěných dětských vláček obsahuje jednu lokomotivu a tři vagónky. Vagónky a lokomotiva se spojují pomocí magnetů. Lokomotiva má jeden magnet a každý vagónek dva — po jednom na obou koncích.

a) S jakou pravděpodobností by vláček držel pohromadě v daném pořadí (vagónky nelze otáčet ani přemisťovat), pokud by v továrně orientaci magnetů přiřazovali náhodně?

b) S jakou pravděpodobností by se dal sestavit vláček s vagónky v alespoň jednom pořadí (vagónky lze otáčet i přemisťovat), pokud by v továrně orientaci magnetů přiřazovali náhodně?

c) S jakou pravděpodobností by se dal sestavit vláček s vagónky v každém pořadí (pro zvolené pořadí je dovoleno vagónky otáčet), pokud by v továrně orientaci magnetů přiřazovali náhodně?

*Úloha 3:* U hrací kostky s  $n$  stěnami očíslovanými  $1, \dots, n$ , kde každé číslo má stejnou pravděpodobnost hodu  $\frac{1}{n}$ , uvažte jevy:

A — padlo sudé číslo

B — padlo číslo větší než  $\frac{n}{2}$ .

Rozhodněte, zdali jsou tyto jevy závislé či nezávislé a to

a) pro  $n = 6$ , tedy pro klasickou krychli,

b) pro  $n = 8$ , čili pro osmistěn

c) pro obecné  $n$

*Úloha 4:* Nechť  $\pi$  je náhodná permutace množiny čísel  $1, 2, \dots, 100$ . Nechť  $A_i$  je jev vyjadřující, že  $\pi(i) = i$ . Jsou jevy  $A_1$  a  $A_2$  nezávislé?

*Úloha 5:* Vašek třikrát hodil spravedlivou šestistěnnou kostkou. Padl mu součet hodů rovný 7.

a) Je pravděpodobnější, že mu v prvním hodu padla jednička nebo dvojka?

b) Jaká je pravděpodobnost, že mu v prvním hodu padla dvojka?

*Úloha 6:* V zábavném pořadu *Let's Make a Deal* nabízel moderátor Monty Hall výhru pod následujícími pravidly: Výhra — automobil je schovaná za jedněmi ze tří dveří. Za zbylými dvěma je cena útěchy — koza. Hráč nejprve na některé dveře ukáže. Moderátor, který ví kde se skrývá výhra, otevře z ostatních dveří takové, že je za nimi výhra není. V této situaci má hráč otevřít jednu ze zbylých dvou dveří, aby dostal, co se za nimi skrývá.

Je pro hráče výhodné změnit názor a otevřít jiné dveře, než na které prve ukázal?

*Úloha 7:* Mějme náhodnou posloupnost sta čísel, kdy každé číslo v posloupnosti je 0 nebo 1 a obě možnosti nastávají s pravděpodobností  $1/2$  nezávisle na ostatních členech posloupnosti. Určete

střední hodnotu počtu po sobě jdoucích šestic jedniček. (Popř. zobecněte pro posloupnosti  $n$  čísel a po sobě jdoucí  $k$ -tice jedniček.)

*Úloha 8:* Mějme náhodnou permutaci  $n$  prvků. Určete střední hodnotu počtu pevných bodů takové permutace (tj. počet prvků  $i$  takových, že  $\pi(i) = i$ , je-li  $\pi$  ona náhodná permutace).