

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé:

- Pravděpodobnost, že při hodu dvacíti kostkami padnou na alespoň desíti kostkách alespoň čtyři oka, je jedna polovina.*
- Pravděpodobnost, že při hodu devatenácti kostkami padnou na alespoň desíti kostkách alespoň čtyři oka, je jedna polovina.*

Své rozhodnutí zdůvodněte. Lze určit výsledek bez výpočtu pravděpodobností?

Úloha 2: Krabice dřevěných deských vláček obsahuje jednu lokomotivu a tři vagonky. Vagonky a lokomotiva se spojují pomocí magnetů. Lokomotiva má jeden magnet a každý vagoněk dva — po jednom na obou koncích.

- S jakou pravděpodobností by vláček držel pohromadě v daném pořadí (vagonky nelze otáčet ani přemisťovat), pokud by v tovarně orientaci magnetů přřizovali náhodně?
- S jakou pravděpodobností by se dal sestavit vláček s vagonky v alespoň jednom pořadí (vagonky lze otáčet i přemisťovat), pokud by v tovarně orientaci magnetů přřizovali náhodně?
- S jakou pravděpodobností by se dal sestavit vláček s vagonky v každém pořadí (pro zvolené pořadí je dovoleno vagonky otáčet), pokud by v tovarně orientaci magnetů přřizovali náhodně?

Úloha 3: U hrací kostky s n stěnami očíslovanými $1, \dots, n$, kde každé číslo má stejnou pravděpodobnost hodit $\frac{1}{n}$, uvažte jevy:

- A — padlo sudé číslo
- B — padlo číslo větší než $\frac{n}{2}$.

Rozhodněte, zdali jsou tyto jevy závislé či nezávislé a to

- pro $n = 6$, tedy pro klasickou krychli,
- pro $n = 8$, čili pro osmištev
- pro obecné n

Úloha 4: Nechtě π je náhodná permutace množiny čísel $1, 2, \dots, 100$. Nechtě A_i je jev vyjadřující, že $\pi(i) = i$. Jsou jevy A_1 a A_2 nezávislé?

Úloha 5: Vašek třikrát hodil správnělyou šestistěnnou kostkou. Padl mu součet hodů rovný 7.

a) Je pravděpodobnější, že mu v prvním hodu padla jednička nebo dvojka?

b) Jaká je pravděpodobnost, že mu v prvním hodu padla dvojka?

Úloha 6: V zábavném pořadu *Let's Make a Deal* nabízel moderátor Monty Hall výhru pod následujícími pravidly: Výhra — autonomní je schována za jedním ze tří dveří. Za zbylými dvěma je cena třídní — koza. Hráč nejprve na některé dveře ukáže. Moderátor, který ví kde se skrývá výhra, otevře z ostatních dveří takové, že je za nimi výhra není. V této situaci má hráč otevřít jednu ze zbylých dvou dveří, aby dostal, co se za nimi skrývá.

Je pro hráče výhodné změnit názor a otevřít jiné dveře, než na které prve ukázal?

Úloha 7: Mějme náhodnou posloupnost sta čísel, kdy každé číslo v posloupnosti je 0 nebo 1 a obě možnosti nastávají s pravděpodobností $1/2$ nezávisle na ostatních členech posloupnosti. Určete

střední hodnotu počtu po sobě jdoucích šestic jedniček. (Popř. zobecněte pro posloupnosti n čísel a po sobě jdoucích k -tice jedniček.)

Úloha 8: Mějme náhodnou permutaci n prvků. Určete střední hodnotu počtu pevných bodů takové permutace (tj. počet prvků i takových, že $\pi(i) = i$, je-li π ona náhodná permutace).