Barvení grafů: Motivace, barvení map

(Po dokreslení obrázků jsem zjistil, že podkladová mapka obsahuje nějaké geografické nepřesnosti. Neměl jsem už sílu je opravovat.)

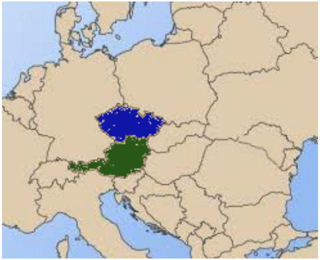
- Můžeme mapu obarvit 3 barvami tak, že sousední státy mají různou barvu?

Barvení grafů: Motivace, barvení map

(Po dokreslení obrázků jsem zjistil, že podkladová mapka obsahuje nějaké geografické nepřesnosti. Neměl jsem už sílu je opravovat.)

- Můžeme mapu obarvit 3 barvami tak, že sousední státy mají různou barvu?

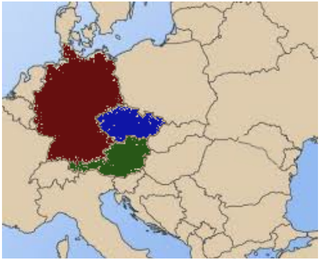
Barvení grafů: Motivace, barvení map



(Po dokreslení obrázků jsem zjistil, že podkladová mapka obsahuje nějaké geografické nepřesnosti. Neměl jsem už sílu je opravovat.)

- Můžeme mapu obarvit 3 barvami tak, že sousední státy mají různou barvu?

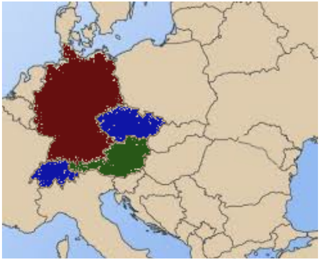
Barvení grafů: Motivace, barvení map



(Po dokreslení obrázků jsem zjistil, že podkladová mapka obsahuje nějaké geografické nepřesnosti. Neměl jsem už sílu je opravovat.)

- Můžeme mapu obarvit 3 barvami tak, že sousední státy mají různou barvu?

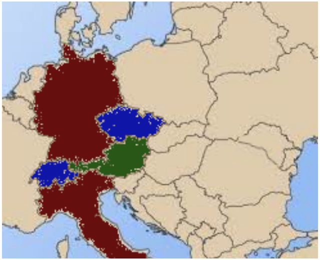
Barvení grafů: Motivace, barvení map



(Po dokreslení obrázků jsem zjistil, že podkladová mapka obsahuje nějaké geografické nepřesnosti. Neměl jsem už sílu je opravovat.)

- Můžeme mapu obarvit 3 barvami tak, že sousední státy mají různou barvu?

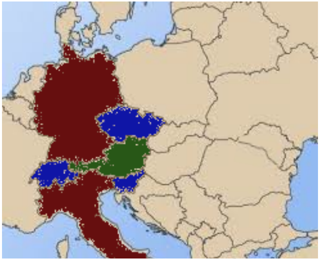
Barvení grafů: Motivace, barvení map



(Po dokreslení obrázků jsem zjistil, že podkladová mapka obsahuje nějaké geografické nepřesnosti. Neměl jsem už sílu je opravovat.)

- Můžeme mapu obarvit 3 barvami tak, že sousední státy mají různou barvu?

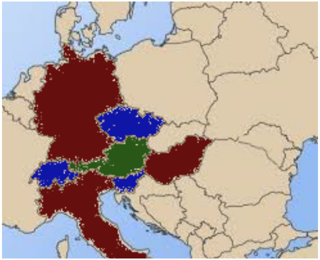
Barvení grafů: Motivace, barvení map



(Po dokreslení obrázků jsem zjistil, že podkladová mapka obsahuje nějaké geografické nepřesnosti. Neměl jsem už sílu je opravovat.)

- Můžeme mapu obarvit 3 barvami tak, že sousední státy mají různou barvu?

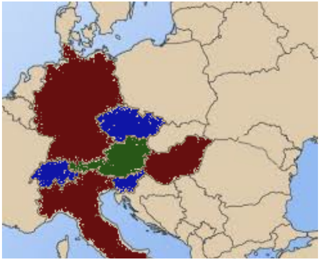
Barvení grafů: Motivace, barvení map



(Po dokreslení obrázků jsem zjistil, že podkladová mapka obsahuje nějaké geografické nepřesnosti. Neměl jsem už sílu je opravovat.)

- Můžeme mapu obarvit 3 barvami tak, že sousední státy mají různou barvu?

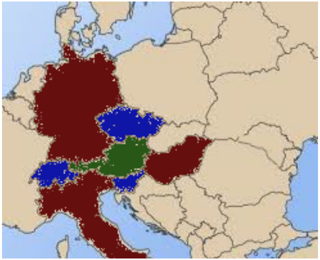
Barvení grafů: Motivace, barvení map



(Po dokreslení obrázků jsem zjistil, že podkladová mapka obsahuje nějaké geografické nepřesnosti. Neměl jsem už sílu je opravovat.)

- Můžeme mapu obarvit 3 barvami tak, že sousední státy mají různou barvu? NE.

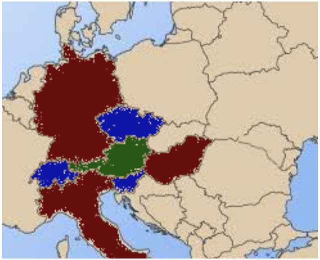
Barvení grafů: Motivace, barvení map



(Po dokreslení obrázků jsem zjistil, že podkladová mapka obsahuje nějaké geografické nepřesnosti. Neměl jsem už sílu je opravovat.)

- Můžeme mapu obarvit 3 barvami tak, že sousední státy mají různou barvu? NE.
- Můžeme mapu obarvit 4 barvami?

Barvení grafů: Motivace, barvení map



(Po dokreslení obrázků jsem zjistil, že podkladová mapka obsahuje nějaké geografické nepřesnosti. Neměl jsem už sílu je opravovat.)

- Můžeme mapu obarvit 3 barvami tak, že sousední státy mají různou barvu? NE.
- Můžeme mapu obarvit 4 barvami?
  ANO, pro mapu, kde státy jsou souvislé regiony. (Později zmíníme jako větu o 4 barvách.)

Barvení grafů: Motivace, barvení map

(Po dokreslení obrázků jsem zjistil, že podkladová mapka obsahuje nějaké geografické nepřesnosti. Neměl jsem už sílu je opravovat.)

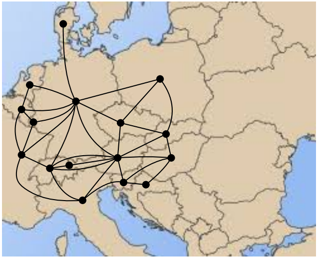
- Můžeme mapu obarvit 3 barvami tak, že sousední státy mají různou barvu?
  NE.
- Můžeme mapu obarvit 4 barvami?
  ANO, pro mapu, kde státy jsou souvislé regiony.
  (Později zmíníme jako větu o 4 barvách.)

Barvení grafů: Motivace, barvení map

(Po dokreslení obrázků jsem zjistil, že podkladová mapka obsahuje nějaké geografické nepřesnosti. Neměl jsem už sílu je opravovat.)

- Můžeme mapu obarvit 3 barvami tak, že sousední státy mají různou barvu?
  NE.
- Můžeme mapu obarvit 4 barvami?
  ANO, pro mapu, kde státy jsou souvislé regiony.
  (Později zmíníme jako větu o 4 barvách.)
- Místo map budeme barvit vrcholy rovinného grafu.

Barvení grafů: Motivace, barvení map

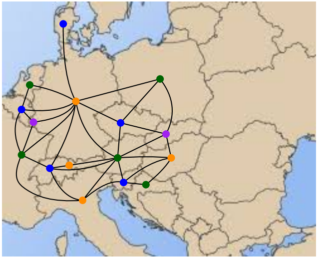


(Po dokreslení obrázků jsem zjistil, že podkladová mapka obsahuje nějaké geografické nepřesnosti. Neměl jsem už sílu je opravovat.)

- Můžeme mapu obarvit 3 barvami tak, že sousední státy mají různou barvu? NE.
- Můžeme mapu obarvit 4 barvami?
  ANO, pro mapu, kde státy jsou souvislé regiony. (Později zmíníme jako větu o 4 barvách.)

- Místo map budeme barvit vrcholy rovinného grafu.
- Přejdeme k duálu mapy a zapomeneme násobné hrany a smyčky.

Barvení grafů: Motivace, barvení map



(Po dokreslení obrázků jsem zjistil, že podkladová mapka obsahuje nějaké geografické nepřesnosti. Neměl jsem už sílu je opravovat.)

- Můžeme mapu obarvit 3 barvami tak, že sousední státy mají různou barvu? NE.
- Můžeme mapu obarvit 4 barvami?
  ANO, pro mapu, kde státy jsou souvislé regiony. (Později zmíníme jako větu o 4 barvách.)

- Místo map budeme barvit vrcholy rovinného grafu.
- Přejdeme k duálu mapy a zapomeneme násobné hrany a smyčky.

Barvení grafu

Definice

Nechť $G = (V, E)$ je graf a $k \in \mathbb{N}$. Zobrazení $b \colon V \to [k]$ nazveme (řádné) obarvení grafu G pomocí k barev, pokud pro každou hranu $e = \{u, v\}$ platí $b(u) \neq b(v)$. Chromatické číslo grafu G, značené $\chi(G)$ je nejmenší k takové, že existuje obarvení G pomocí k barev. (Pro prázdný graf definujeme chromatické číslo jako 0.)

Barvení grafu

Definice

Nechť $G = (V, E)$ je graf a $k \in \mathbb{N}$. Zobrazení $b \colon V \to [k]$ nazveme (řádné) obarvení grafu G pomocí k barev, pokud pro každou hranu $e = \{u, v\}$ platí $b(u) \neq b(v)$. Chromatické číslo grafu G, značené $\chi(G)$ je nejmenší k takové, že existuje obarvení G pomocí k barev. (Pro prázdný graf definujeme chromatické číslo jako 0.)

Definice

Graf G je k-degenerovaný, pokud každý jeho (neprázdný) podgraf obsahuje vrchol stupně nejvýše k.

Barvení grafu

Definice

Nechť $G = (V, E)$ je graf a $k \in \mathbb{N}$. Zobrazení $b\colon V \to [k]$ nazveme (řádné) obarvení grafu G pomocí k barev, pokud pro každou hranu $e = \{u, v\}$ platí $b(u) \neq b(v)$. Chromatické číslo grafu G, značené $\chi(G)$ je nejmenší k takové, že existuje obarvení G pomocí k barev. (Pro prázdný graf definujeme chromatické číslo jako 0.)

Definice

Graf G je k-degenerovaný, pokud každý jeho (neprázdný) podgraf obsahuje vrchol stupně nejvýše k.

Tvrzení (o chromatickém čísle a k-degenerovanosti)

Pro každý k-degenerovaný graf G platí $\chi(G) \leq k + 1$.

Důkaz tvrzení o chromatickém čísle a k-degenerovanosti

Tvrzení (o chromatickém čísle a k-degenerovanosti)

Pro každý k-degenerovaný graf G platí $\chi(G) \leq k + 1$.

Důkaz tvrzení o chromatickém čísle a k-degenerovanosti

Tvrzení (o chromatickém čísle a k-degenerovanosti)

Pro každý k-degenerovaný graf G platí $\chi(G) \leq k + 1$.

Důkaz.

- Indukcí podle počtu vrcholů n.

Důkaz tvrzení o chromatickém čísle a k-degenerovanosti

Tvrzení (o chromatickém čísle a k-degenerovanosti)

Pro každý k-degenerovaný graf G platí $\chi(G) \leq k + 1$.

Důkaz.

- Indukcí podle počtu vrcholů n.
- $n = 0$. G je prázdný, chromatické číslo je dokonce 0.

Důkaz tvrzení o chromatickém čísle a k-degenerovanosti

Tvrzení (o chromatickém čísle a k-degenerovanosti)

Pro každý k-degenerovaný graf G platí $\chi(G) \leq k + 1$.

Důkaz.

- Indukcí podle počtu vrcholů n.
- $n = 0$. G je prázdný, chromatické číslo je dokonce 0.
- 2. IK: $n \geq 1$, předpokládáme platnost pro menší k-degenerované grafy.

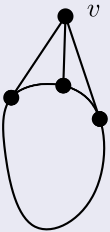
Důkaz tvrzení o chromatickém čísle a k-degenerovanosti

Tvrzení (o chromatickém čísle a k-degenerovanosti)

Pro každý k-degenerovaný graf G platí $\chi(G) \leq k + 1$.

Důkaz.

- Indukcí podle počtu vrcholů n.
- $n = 0$. G je prázdný, chromatické číslo je dokonce 0.
- 2. IK: $n \geq 1$, předpokládáme platnost pro menší k-degenerované grafy.



- Najdeme v G vrchol v stupně nejvýše k.

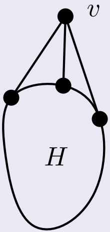
Důkaz tvrzení o chromatickém čísle a k-degenerovanosti

Tvrzení (o chromatickém čísle a k-degenerovanosti)

Pro každý k-degenerovaný graf G platí $\chi(G) \leq k + 1$.

Důkaz.

- Indukcí podle počtu vrcholů n.
- $n = 0$. G je prázdný, chromatické číslo je dokonce 0.
- 2. IK: $n \geq 1$, předpokládáme platnost pro menší k-degenerované grafy.



- Najdeme v G vrchol v stupně nejvýše k.
- Uvážíme graf $H := G - v$.

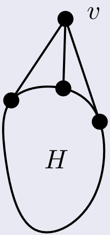
Důkaz tvrzení o chromatickém čísle a k-degenerovanosti

Tvrzení (o chromatickém čísle a k-degenerovanosti)

Pro každý k-degenerovaný graf G platí $\chi(G) \leq k + 1$.

Důkaz.

- Indukcí podle počtu vrcholů n.
- $n = 0$. G je prázdný, chromatické číslo je dokonce 0.
- 2. IK: $n \geq 1$, předpokládáme platnost pro menší k-degenerované grafy.



  - Najdeme v G vrchol v stupně nejvýše k.
  - Uvážíme graf $H := G - v$.
  - H je také k-degenerovaný. (Každý podgraf H je i podgraf G.)

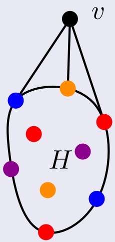
Důkaz tvrzení o chromatickém čísle a k-degenerovanosti

Tvrzení (o chromatickém čísle a k-degenerovanosti)

Pro každý k-degenerovaný graf G platí $\chi(G) \leq k + 1$.

Důkaz.

- Indukcí podle počtu vrcholů n.
- $n = 0$. G je prázdný, chromatické číslo je dokonce 0.
- 2. IK: $n \geq 1$, předpokládáme platnost pro menší k-degenerované grafy.



- Najdeme v G vrchol v stupně nejvýše k.
- Uvážíme graf $H := G - v$.
- H je také k-degenerovaný. (Každý podgraf H je i podgraf G.)
- Z ind. předp.: $\chi(H) \leq k + 1$. Existuje tedy obarvení H pomocí $k + 1$ barev.

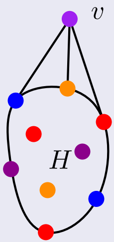
Důkaz tvrzení o chromatickém čísle a k-degenerovanosti

Tvrzení (o chromatickém čísle a k-degenerovanosti)

Pro každý k-degenerovaný graf G platí $\chi(G) \leq k + 1$.

Důkaz.

- Indukcí podle počtu vrcholů n.
- $n = 0$. G je prázdný, chromatické číslo je dokonce 0.
- 2. IK: $n \geq 1$, předpokládáme platnost pro menší k-degenerované grafy.



- Najdeme v G vrchol v stupně nejvýše k.
- Uvážíme graf $H := G - v$.
- H je také k-degenerovaný. (Každý podgraf H je i podgraf G.)
- Z ind. předp.: $\chi(H) \leq k + 1$. Existuje tedy obarvení H pomocí $k + 1$ barev.
- Dobarvíme v volnou barvou. $\square$

Věta o šesti barvách

Tvrzení (o chromatickém čísle a k-degenerovanosti)

Pro každý k-degenerovaný graf G platí $\chi(G) \leq k + 1$.

Věta o šesti barvách

Tvrzení (o chromatickém čísle a k-degenerovanosti)

Pro každý k-degenerovaný graf G platí $\chi(G) \leq k + 1$.

Důsledek (Věta o šesti barvách)

Každý rovinný graf lze obarvit šesti barvami.

Věta o šesti barvách

Tvrzení (o chromatickém čísle a k-degenerovanosti)

Pro každý k-degenerovaný graf G platí $\chi(G) \leq k + 1$.

Důsledek (Věta o šesti barvách)

Každý rovinný graf lze obarvit šesti barvami.

Důkaz.

- Každý rovinný graf je 5-degenerovaný, protože každý jeho podgraf je opět rovinný, a tedy obsahuje vrchol stupně maximálně 5. (Víme z minula.)

Věta o šesti barvách

Tvrzení (o chromatickém čísle a k-degenerovanosti)

Pro každý k-degenerovaný graf G platí $\chi(G) \leq k + 1$.

Důsledek (Věta o šesti barvách)

Každý rovinný graf lze obarvit šesti barvami.

Důkaz.

- Každý rovinný graf je 5-degenerovaný, protože každý jeho podgraf je opět rovinný, a tedy obsahuje vrchol stupně maximálně 5. (Víme z minula.)
- Tedy podle tvrzení, chromatické číslo rov. grafu je ≤ 6. $\square$

Věta o čtyřech barvách

Ve skutečnosti platí:

Věta (Věta o čtyřech barvách)

Každý rovinný graf lze obarvit čtyřmi barvami.

Věta o čtyřech barvách

Ve skutečnosti platí:

Věta (Věta o čtyřech barvách)

Každý rovinný graf lze obarvit čtyřmi barvami.

- Důkaz velmi komplikovaný, mj. využívá počítače.

Věta o čtyřech barvách

Ve skutečnosti platí:

Věta (Věta o čtyřech barvách)

Každý rovinný graf lze obarvit čtyřmi barvami.

- Důkaz velmi komplikovaný, mj. využívá počítače.
- Nebudeme tedy dokazovat. Ale ukážeme si vylepšení dřívějšího důsledku.

Věta o pěti barvách

Věta (Věta o pěti barvách)

Každý rovinný graf G lze obarvit pěti barvami.

Věta o pěti barvách

Věta (Věta o pěti barvách)

Každý rovinný graf G lze obarvit pěti barvami.

Důkaz.

- Opět indukcí, jako u tvrzení s degenerovaností.

Věta o pěti barvách

Věta (Věta o pěti barvách)

Každý rovinný graf G lze obarvit pěti barvami.

Důkaz.

- Opět indukcí, jako u tvrzení s degenerovaností.
- V druhém IK: Najdeme v stupně ≤ 5, $H := G - v$. Obarvíme H pěti barvami z indukčního předpokladu.

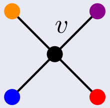
Věta o pěti barvách

Věta (Věta o pěti barvách)

Každý rovinný graf G lze obarvit pěti barvami.

Důkaz.

- Opět indukcí, jako u tvrzení s degenerovaností.
- V druhém IK: Najdeme v stupně ≤ 5, $H := G - v$. Obarvíme H pěti barvami z indukčního předpokladu.
  - Pokud $\deg v \leq 4$, lze v dobarvit barvou, která není na jeho sousedech, máme obarvení G.



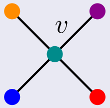
Věta o pěti barvách

Věta (Věta o pěti barvách)

Každý rovinný graf G lze obarvit pěti barvami.

Důkaz.

- Opět indukcí, jako u tvrzení s degenerovaností.
- V druhém IK: Najdeme v stupně ≤ 5, $H := G - v$. Obarvíme H pěti barvami z indukčního předpokladu.
  - Pokud $\deg v \leq 4$, lze v dobarvit barvou, která není na jeho sousedech, máme obarvení G.



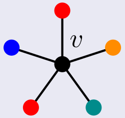
Věta o pěti barvách

Věta (Věta o pěti barvách)

Každý rovinný graf G lze obarvit pěti barvami.

Důkaz.

- Opět indukcí, jako u tvrzení s degenerovaností.
- V druhém IK: Najdeme v stupně ≤ 5, $H := G - v$. Obarvíme H pěti barvami z indukčního předpokladu.
  - Pokud $\deg v \leq 4$, lze v dobarvit barvou, která není na jeho sousedech, máme obarvení G.
  - Pokud $\deg v = 5$, ale sousedi používají ≤ 4 barvy, postupujeme stejně.



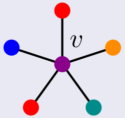
Věta o pěti barvách

Věta (Věta o pěti barvách)

Každý rovinný graf G lze obarvit pěti barvami.

Důkaz.

- Opět indukcí, jako u tvrzení s degenerovaností.
- V druhém IK: Najdeme v stupně ≤ 5, $H := G - v$. Obarvíme H pěti barvami z indukčního předpokladu.



  - Pokud $\deg v \leq 4$, lze v dobarvit barvou, která není na jeho sousedech, máme obarvení G.
  - Pokud $\deg v = 5$, ale sousedi používají ≤ 4 barvy, postupujeme stejně.

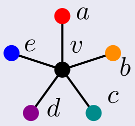
Věta o pěti barvách

Věta (Věta o pěti barvách)

Každý rovinný graf G lze obarvit pěti barvami.

Důkaz.

- Opět indukcí, jako u tvrzení s degenerovaností.
- V druhém IK: Najdeme v stupně ≤ 5, $H := G - v$. Obarvíme H pěti barvami z indukčního předpokladu.



  - Pokud $\deg v \leq 4$, lze v dobarvit barvou, která není na jeho sousedech, máme obarvení G.
  - Pokud $\deg v = 5$, ale sousedi používají ≤ 4 barvy, postupujeme stejně.
  - Zbývá dořešit, když sousedi (a, b, c, d, e v cykl. pořadí) mají přesně 5 barev.

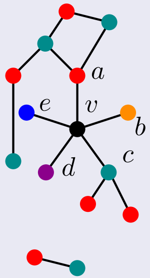
Věta o pěti barvách

Věta (Věta o pěti barvách)

Každý rovinný graf G lze obarvit pěti barvami.

Důkaz.

- Opět indukcí, jako u tvrzení s degenerovaností.
- V druhém IK: Najdeme v stupně ≤ 5, $H := G - v$. Obarvíme H pěti barvami z indukčního předpokladu.

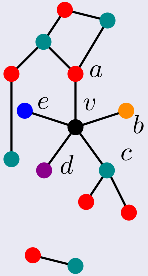


  - Pokud $\deg v \leq 4$, lze v dobarvit barvou, která není na jeho sousedech, máme obarvení G.
  - Pokud $\deg v = 5$, ale sousedi používají ≤ 4 barvy, postupujeme stejně.
  - Zbývá dořešit, když sousedi (a, b, c, d, e v cykl. pořadí) mají přesně 5 barev.
  - G_{ac}: indukovaný podgraf na vrcholech barev jako a či c. □

Důkaz věty o pěti barvách, pokračování

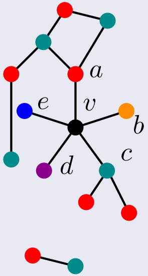
Důkaz, pokračování.

- G_{ac}: indukovaný podgraf na vrcholech barev jako a či c.



Důkaz věty o pěti barvách, pokračování

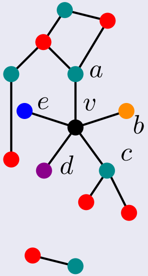
Důkaz, pokračování.



- G_{ac}: indukovaný podgraf na vrcholech barev jako a či c.
- Jsou-li a a c v různých komponentách G_{ac}, prohodíme barvy v komponentě obsahující a a dobarvíme v.

Důkaz věty o pěti barvách, pokračování

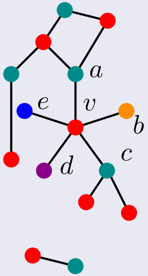
Důkaz, pokračování.



- G_{ac}: indukovaný podgraf na vrcholech barev jako a či c.
- Jsou-li a a c v různých komponentách G_{ac}, prohodíme barvy v komponentě obsahující a a dobarvíme v.

Důkaz věty o pěti barvách, pokračování

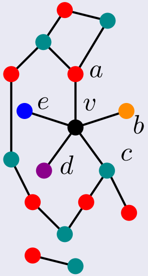
Důkaz, pokračování.



- G_{ac}: indukovaný podgraf na vrcholech barev jako a či c.
- Jsou-li a a c v různých komponentách G_{ac}, prohodíme barvy v komponentě obsahující a a dobarvíme v.
- Zbývá dořešit situaci, pokud a a c jsou v téže komponentě.

Důkaz věty o pěti barvách, pokračování

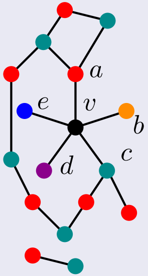
Důkaz, pokračování.



- G_{ac}: indukovaný podgraf na vrcholech barev jako a či c.
- Jsou-li a a c v různých komponentách G_{ac}, prohodíme barvy v komponentě obsahující a a dobarvíme v.
- Zbývá dořešit situaci, pokud a a c jsou v téže komponentě.

Důkaz věty o pěti barvách, pokračování

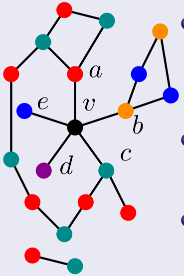
Důkaz, pokračování.



- G_{ac}: indukovaný podgraf na vrcholech barev jako a či c.
- Jsou-li a a c v různých komponentách G_{ac}, prohodíme barvy v komponentě obsahující a a dobarvíme v.
- Zbývá dořešit situaci, pokud a a c jsou v téže komponentě.
- Analogicky uvažujeme graf G_{be} to už b a e musejí být v různých komponentách.

Důkaz věty o pěti barvách, pokračování

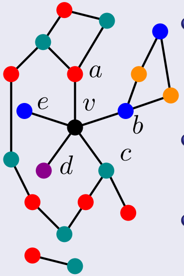
Důkaz, pokračování.



- G_{ac}: indukovaný podgraf na vrcholech barev jako a či c.
- Jsou-li a a c v různých komponentách G_{ac}, prohodíme barvy v komponentě obsahující a a dobarvíme v.
- Zbývá dořešit situaci, pokud a a c jsou v téže komponentě.
- Analogicky uvažujeme graf G_{be} to už b a e musejí být v různých komponentách.
- Prohodíme barvy na komponentě s b a máme hotovo.

Důkaz věty o pěti barvách, pokračování

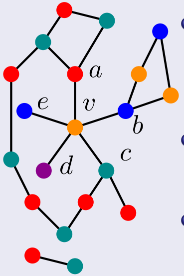
Důkaz, pokračování.



- G_{ac}: indukovaný podgraf na vrcholech barev jako a či c.
- Jsou-li a a c v různých komponentách G_{ac}, prohodíme barvy v komponentě obsahující a a dobarvíme v.
- Zbývá dořešit situaci, pokud a a c jsou v téže komponentě.
- Analogicky uvažujeme graf G_{be} to už b a e musejí být v různých komponentách.
- Prohodíme barvy na komponentě s b a máme hotovo.

Důkaz věty o pěti barvách, pokračování

Důkaz, pokračování.



- G_{ac}: indukovaný podgraf na vrcholech barev jako a či c.
- Jsou-li a a c v různých komponentách G_{ac}, prohodíme barvy v komponentě obsahující a a dobarvíme v.
- Zbývá dořešit situaci, pokud a a c jsou v téže komponentě.
- Analogicky uvažujeme graf G_{be} to už b a e musejí být v různých komponentách.
- Prohodíme barvy na komponentě s b a máme hotovo. $\square$