5. cvičení z MA — 10. 11. 2008

(na 4. cvičení jsme počítali příklady z papíru ke třetímu cvičení)

Další limity

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor^3}{n-\lfloor\sqrt{n+9}\rfloor}$ **2.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{i}{n}\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$ **3.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+2n^n+n!}{(n+1)^4+\sin n+(3n)!}$

4. (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{\sqrt{n^7}+\sqrt[3]{n^7}}-\sqrt[3]{\sqrt{n^7}-\sqrt[3]{n^7}})$

5. Spočtěte v závislosti na $k,l\in\mathbb{N}$ (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k-(n-1)^l}{n^k+n^l}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^k+(-n)^l}{(n-1)^k-n^l}$.

6. (a) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+1/n)^{n^2}$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+1/n^2)^n$

7. Dokažte, že součin $\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots$ má konečnou nenulovou hodnotu.

8. Čemu se rovná $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$?

9. * Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{k} a_i\sqrt{n+i}=0$, pokud $\sum\limits_{i=0}^{k} a_i=0$.

10. * Pro která $x\in\mathbb{R}$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx$? Totéž pro $\lim\limits_{n\to\infty} \cos nx$.

---

11. Rekurentně zadané posloupnosti — vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (a nezapomeňte si rozmyslet, zda limita vůbec existuje) pro (a) $a_1=t$ ($t>0$ je parametr), $a_{n+1}=(a_n+2/a_n)/2$, (b) $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$,
(c) $a_1=1$, $a_{n+1}=1/(1+a_n)$. (d) $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2-a_n}$
(e) $a_1=0$, $a_{n+1}=a_n+(x-a_n)^2/2$ ($0\le x\le 1$)
(f) (Jako varování!) $a_1=0.4$, $a_{n+1}=4a_n(1-a_n)$.

---

12. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:
(a) Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} 1/a_n=0$. (b) Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} 1/a_n=+\infty$.
(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, právě když $\lim\limits_{n\to\infty} 1/|a_n|=+\infty$. (d) Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}=A$.
(e) Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}=A$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$. (f) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$, právě když $\lim\limits_{n\to\infty} a_{b_n}=A$ pro každou rostoucí posloupnost přirozených čísel b_n. (g) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$, právě když $\lim\limits_{n\to\infty} a_{b_n}=A$ pro každou neklesající posloupnost přirozených čísel b_n.

13. Co je to limes superior/inferior? Jak souvisí s limitou, se supremem/infimem? Určete limes superior i inferior posloupností $(n-1)/n$, $(-1)^n$, $(-1)^n-1/n$, $5^{(-1)^n 3^n}$.