Úlohy k cvičení 4

Limity posloupností (pokračování) a řady.

Tvrzení (O limitě sevřené posloupnosti)**.** Nechť $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty, (c_n)_{n=1}^\infty$ jsou posloupnosti takové, že $a_n \le b_n \le c_n$ pro všechna n přirozená (je možné připustit konečně mnoho výjimek). Předpokládejme, že existují limita první a třetí posloupnosti a platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L.$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L.$$

1. Spočtěte následující limity nebo dokažte, že neexistují.
   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$,
   (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin n^2$,
   (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+\cos n}{n-\sin n}$,
   (d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}}$,
   (e) $\lim_{n\to\infty} n^a$ v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.
   (f) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$,
   (g) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$,
   (h) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$,
   (i) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+4n+n\sin n}{n\cos n+(2n+\sin n)^2}$,
   (j) $\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n}}$,
   (k) $\lim_{n\to\infty} n^{\cos \pi n}$,
   (l) $\lim_{n\to\infty} \cos(n^2\pi)+\cos((n+1)\pi)$,
   (m) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}$,
   (n) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n^{2+\cos n}}{\sqrt{n^8+n^7+n^6}}$,
   (o)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}$,
   (p)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2000}$,
   (q)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$,
   (r)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$,
   (s) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+5}-\sqrt{n-1}$,
2. Sečtěte řady:
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}+3^n}{6^n}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$.

(c)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

(d)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

(e)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+5)}$.

(f)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

(g)*(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$.