Úlohy k cvičení 3

Limity posloupností.

Definice. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

(i) má *vlastní limitu* a, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

(ii) má *nevlastní limitu* ∞, pokud

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \colon a_n > K.$$

1. U následujících posloupností dokažte z definice limity, že platí:
   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$,
   (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$,
   (c) $\lim_{n\to\infty} \log_{10} n = \infty$,
   (d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$,
   (e)* $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, pro $q \in (-1, 1)$,
   (f)* $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$, pro $q > 1$,
   (g)* $\lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{n} = 0$ (můžete využívat nerovnost $\sin x \leq x$ pro x kladné).
2. Spočtěte následující limity nebo dokažte, že neexistují.
   (a) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$,
   (b) $\lim_{n\to\infty} \cos\,(-1)^n$,
   (c) $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n!}$,
   (d) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(-1)^n$,
   (e) $\lim_{n\to\infty} \cos(\frac{n\pi}{4})$,
3. Spočtěte následující limity.
   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1}$,
   (b) $\lim_{n\to\infty} (3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2-1})(2 - \frac{1}{n^2})$,
   (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3n+2}{3n^2+1}$,
   (d) $\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+2}{n^3-1}$,
   (e) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-10}{1-10n^3}$,
   (f) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n+2}{-2n^2+4}$,
   (g) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$,

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^{20}(-3n+2)^{30}}{(4n-5)^{50}}$,

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+5^n+7^n}{3^{n+1}+5^{n+1}+7^{n+1}}$.

4. Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení. U každé implikace v (a) a (b) předpokládejte, že limita, ze které vycházíte, existuje. U (c) a (d) předpokládejte, že všechny limity existují.

   (a) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$.

   (b) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n} = a$.

   (c) $\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \leq b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.

   (d) $\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n < b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$.