Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Které z následujících operací provedených na neklesající funkce f a g dávají opět neklesající fuknkci: $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$, $f\circ g$?

Úloha 2: Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

a) Funkce f je na intervalu I rostoucí, právě když platí: $\forall x,y\in I, x\neq y : \frac{f(x)-f(y)}{x-y}>0$

b) Je-li funkce f neklesající na intervalu $(-\infty,a\rangle$ a nerostoucí na $\langle a,\infty)$ pro nějaké $a\in\mathbb{R}$, potom f nabývá maxima.

c) Nabývá-li funkce f minima v bodě $a\in\mathbb{R}$, potom existuje $\varepsilon>0$ takové, že f je nerostoucí na intervalu $(a-\varepsilon,a\rangle$ a neklesající na $\langle a,a+\varepsilon)$.

d) Má-li funkce f v bodě c limitu ∞, potom je hodnota funkce f na každém prstencovém okolí $P_\delta(c)$ neomezená.

e) Je-li hodnota funkce f na každém prstencovém okolí $P_\delta(c)$ shora neomezená, potom $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$.

Úloha 3: Spočítejte limity

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1^\pm}\frac{x^2-1}{x^3-x^2-x+1}$

Úloha 4: Určete limity následujících funkcí ve všech bodech mimo definiční obor a v $\pm\infty$:

a) $\dfrac{3x^2+1}{2x^2+1}$

b) $\dfrac{2x^2+1}{x^3+1}$

c) $\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

d) $\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}$

Úloha 5: Po pevné $n\in\mathbb{N}$ spočítejte limitu $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$

Úloha 6: Spočítejte limity

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$

Úloha 7: V závislosti na paramentrech $m, n \in \mathbb{N}$ a $a, b \in \mathbb{R}$ spočtěte limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{(x+a)(x+b)}-x$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$

Úloha 8: Spočítejte limity

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^2+\sin x}$.

Úloha 9: Spočítejte limity

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\log(1+2^x)}{x}$

Úloha 10: Vyšetřete konvergenci řady

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) n^\alpha$ v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.

Úloha 11: Spočítejte limity

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+\sin x)}{x}$

Úloha 12: Spočtěte limity

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin(\sin x))}{\mathrm{tg}(\mathrm{tg}(x))}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}(x)-\sin(x)}{x^3}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3(x)}{x\sin(\pi x)}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x}, a>0$

g) $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x - 1}{x-e}$

h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\sqrt{\sin x}}-\cos x}{\sqrt{x}}$

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{1+\cos\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)}.$

k) $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}}.$

Úloha 13: Rozhodněte, zda následující limity existují. Pokud existují, určete jejich hodnotu.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}.$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3}.$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{x^2+4}\right).$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right).$

e) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right).$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}.$